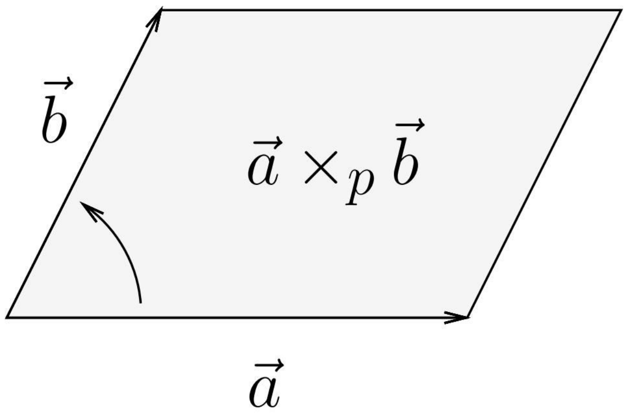
Produkter af vektorer i 2 dimensioner



Peter Harremoës
Niels Brock

September 2010

1 Indledning

Disse noter er skrevet som supplement og delvis erstatning for tilsvarende materiale i bøgerne Mat B og Mat A. Vi vil hovedsageligt bruge bøgernes øvelser og opgaver.

2 Planproduktet

Vi har set, at man kan gange en vektor med et tal. Et oplagt spørgsmål er om man også kan gange to vektorer med hinanden. Svaret er ja, men hvad der kan forekomme forvirrende er, at der er flere måder at gøre det på. Vi vil starte med at definere det såkaldte *planprodukt*.

Før vi kan definere planproduktet, er det nødvendigt at definere en *orientering* af planen. Sædvanligvis tegner man koordinatsystemer med 1.-aksen vandret og positive tal mod højre. 2.-aksen tegnes normalt lodret med positive tal opad. En rotation fra 1.-aksen til 2.-aksen vil vi regne positiv. Bemærk, at denne rotation går mod urets retning. I matematik regner man rotationer mod uret retning for positive og rotationer med uret for negative. Bemærk, at i navigation er det modsat - rotationer med uret regnes positive.

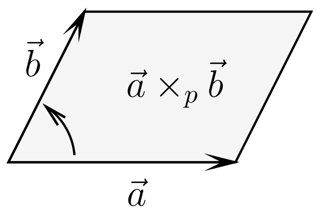


Figure 1: Orienteringen af $(\vec{a}, \vec{b})$ er her positiv.

Hvis vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, så kan man også tale om orienteringen af parret $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Orienteringen siges at være positiv dersom den korteste rotation fra $\vec{a}$'s retning til $\vec{b}$'s retning er positiv. Ellers siges orienteringen af $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ at være negativ.

Definition 1 *Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være vektorer. Hvis $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ er positivt orienteret, så defineres planproduktet fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ som*

$$\vec{a} \times_p \vec{b} = \text{arealet af det af } \vec{a} \text{ og } \vec{b} \text{ udspændte parallelogram.}$$

Hvis $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ er negativt orienteret, så defineres planproduktet fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ som

$$\vec{a} \times_p \vec{b} = -\text{arealet af det af } \vec{a} \text{ og } \vec{b} \text{ udspændte parallelogram.}$$

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så defineres planproduktet fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ som

$$\vec{a} \times_p \vec{b} = 0.$$

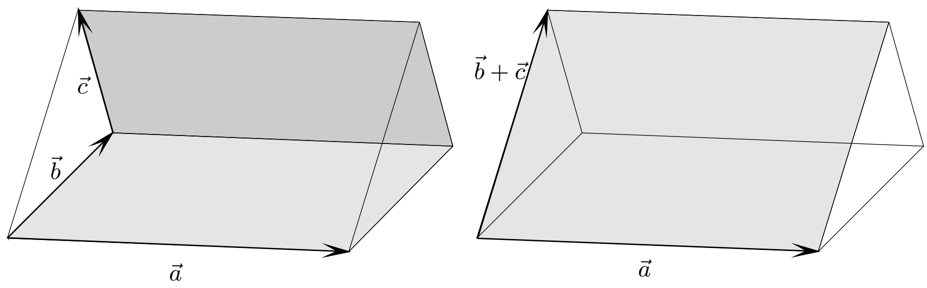


Figure 2: Summen af arealerne af de gr parallelogrammer til venstre er lig arealet af parallellogrammet til hjre.

Planproduktet er således et areal regnet med fortegn. Grunden til at vi regner arealer med fortegn er, at vi på denne måde får et produkt, som opfylder nogle pæne regneregler. Dette ville ikke være tilfældet, hvis vi ikke regnede med fortegn.

Sætning 2 *For tre vilkårlige vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ og en konstant $k \in \mathbb{R}$ gælder følgende regneregler:*

1. $\vec{a} \times_p \vec{b} = -\vec{b} \times_p \vec{a}$ *(anti-kommutativ lov).*
2. $(k \cdot \vec{a}) \times_p \vec{b} = k \cdot \left(\vec{a} \times_p \vec{b}\right) = \vec{a} \times_p \left(k \cdot \vec{b}\right)$.
3. $\vec{a} \times_p \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times_p \vec{b} + \vec{a} \times_p \vec{c}$ *og* $\left(\vec{b} + \vec{c}\right) \times_p \vec{a} = \vec{b} \times_p \vec{a} + \vec{c} \times_p \vec{a}$ *(distributiv love).*
4. $\vec{a} \times_p \vec{b} = 0$ *netop hvis* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ *er parallelle. Specielt er* $\vec{a} \times_p \vec{a} = 0$.

Bevis. Vi viser de enkelte regneregler en ad gangen.

1. Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så står der 0 på begge sider af lighedstegnet. Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, vil det udspændte parallelogram have samme areal uanset hvilken rækkefølge $\vec{a}$ og $\vec{b}$ står i. Orienteringen af $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ er modsat af orienteringen af $\left(\vec{b}, \vec{a}\right)$ så planproduktet skifter fortegn, når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bytter plads.
2. Denne regneregel siger, at hvis en af siderne i et palallellogram ganges med k så vil arealet af det nye parallelogram være k gange så stort som arealet af det oprindelige parallelogram.
3. Beviset for den første af de to ligninger fremgår af Figur 2. Den anden af de to ligninger regel bevises på samme måde eller ved at kombinere regel 1 og regel 3.
4. Dette skyldes at en vektor altid er parallel med sig selv.

■

Med disse regneregler kan vi udlede en formel til beregning af planprodukter i koordinatsystemer.

Sætning 3 *Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være vektorer med koordinater* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *og* $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. *Da er planproduktet fra $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved*

$$\vec{a} \times_p \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Bevis. Vi skriver

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}\ , \\ \vec{b} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}\ . \end{aligned}$$

Vi vil benytte, at $\vec{i} \times_p \vec{j} = 1$ og at $\vec{j} \times_p \vec{i} = -1$ til at vise

$$\begin{aligned} \vec{a} \times_p \vec{b} &= \left(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}\right) \times_p \left(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j}\right) \\ &= \left(a_1 \vec{i}\right) \times_p \left(b_1 \vec{i}\right) + \left(a_1 \vec{i}\right) \times_p \left(b_2 \vec{j}\right) + \left(a_2 \vec{j}\right) \times_p \left(b_1 \vec{i}\right) + \left(a_2 \vec{j}\right) \times_p \left(b_2 \vec{j}\right) \\ &= a_1 b_1 \left(\vec{i} \times_p \vec{i}\right) + a_1 b_2 \left(\vec{i} \times_p \vec{j}\right) + a_2 b_1 \left(\vec{j} \times_p \vec{i}\right) + a_2 b_2 \left(\vec{j} \times_p \vec{j}\right) \\ &= a_1 b_1 \cdot 0 + a_1 b_2 \cdot 1 + a_2 b_1 \cdot (-1) + a_2 b_2 \cdot 0 \\ &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist. ∎

Med denne formel er det nu let at beregne arealet af diverse polygoner.

Example 4 *Vektorerne* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *og* $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *udspænder et parallelogram. Planproduktet er*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times_p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 7.$$

Parallelogrammets areal er derfor 7.

Example 5 *Vektorerne* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *og* $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *udspænder et parallelogram. Planproduktet er*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times_p \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = -8.$$

Planproduktet er negativt hvilket afspejler at vektorerne er negativt orienterede. Arealet er 8.

Example 6 *En trekant har hjørner $A = (1,2)$, $B = (5,3)$ og $C = (2,6)$. Vi bestemmer vektorer svarende til to af siderne.*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Planproduktet beregnes som

$$\overrightarrow{AB} \times_p \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times_p \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 15.$$

Arealet af det udspændte parallelogram er dermed 15. Arealet af den udspændte trekant er halvt så stort, hvilket er $15/7 = 7\frac{1}{2}$.

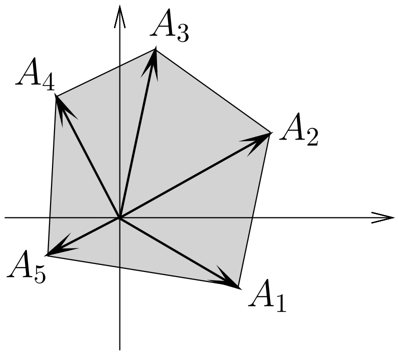


Figure 3: Trianguleret femkant.

Notation 7 *I dette afsnit har vi brugt* $\times_p$ *som notation for planproduktet. Dette er imidlertid ikke standardnotation og kan derfor ikke bruges ved skriftlig eksamen. Den mest almindelige notation for planprodukt er at skrive* $\det\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ *og kalde planproduktet for* determinanten *af* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$*. Hvis vektorerne er givet ved koordinaterne*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ,$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

så er det almindeligt at skrive determinanten som

$$\det\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Historisk set startede vektorregning som et systematiske studie af determinanter (i flere dimensioner).

Sætning 8 (Arealformel) *Lad* $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *betegne hjørnerne i en polygon så nummereringen af hjørnerne er i positiv omløbsretning. Da er arealet af polygonen*

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} \times_p \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2} \times_p \overrightarrow{OA_3} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} \times_p \overrightarrow{OA_1}\right)$$

hvor O *er koordinatsystemets begyndelsespunkt.*

Bevis. Hvis O ligger inden i polygonen og linjestykkerne fra O til polygonens hjørner giver en triangulering af polygonen som på Figur 3 så er sætningen oplagt. I andre tilfælde beviser man sætningen for hver trekant i en triangulering af polygonen og lægger de enkelte arealer sammen. ■

Example 9 *En femkant har hjørner* $(-1, 1)$, $(-2, -3)$, $(1, -2)$, $(3, 1)$ *og* $(2, 4)$.

Arealet beregnes ved hjælp af vore arealformel

$$\frac{1}{2}\left(\left|\begin{array}{cc} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{array}\right|\right)$$
$$= \frac{1}{2}(5+7+7+10+6) = \frac{35}{2}.$$

Arealet er derfor $35/2$.

Øvelse 10 *Beregn arealet af en firkant med hjørner* $(2,1)$, $(3,2)$, $(5,6)$ *og* $(1,9)$. *Tegn firkanten ind i et koordinatsystem.*

3 Tværvektor

Som vi har set, kan man bruge planproduktet til at undersøge om to vektorer er parallelle. Vi ønsker nu at bruge planproduktet til at undersøge om to vektorer er *vinkelrette* eller *ortogonale* som det også hedder.

Definition 11 *Lad* $\vec{a}$ *være en vektor. Da er tværvektoren til* $\vec{a}$ *den vektor som fås ved at dreje* $\vec{a}$ *en kvart tørn i positiv omløbsretning. Tværvektoren til* $\vec{a}$ *betegnes* $\widehat{\vec{a}}$ *eller blot* $\widehat{a}$.

I stedet for at sige "tværvektoren til $\vec{a}$" er det almindeligt blot at siges "a-hat", idet a får en "hat" på.

Sætning 12 *Lad* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ *være vektorer. Da er* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$ *ortogonale, netop hvis*

$$\vec{a} \times_p \widehat{\vec{b}} = 0.$$

Bevis. *Dette følger af, at* $\vec{a} \perp \vec{b}$ *netop hvis* $\vec{a} \| \widehat{\vec{b}}$. ■

Sætning 13 *Lad* $\vec{a}$ *og* b *være vektorer og lad* k *være et reelt tal. Da gælder følgende regneregler:*

1. $\widehat{(k\vec{a})} = k\left(\widehat{\vec{a}}\right)$.
2. $\widehat{\vec{a}+\vec{b}} = \widehat{\vec{a}} + \widehat{\vec{b}}$.
3. $\widehat{\widehat{\vec{a}}} = -\vec{a}$.
4. $\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{\vec{a}}}}} = \vec{a}$.

Bevis. Beviserne for disse regneregler fås direkte ud fra tegninger af hvad der foregår. ■

Sætning 14 *Hvis vektoren* $\vec{a}$ *er givet ved sine koordinater* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, *så gælder*

$$\widehat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Bevis. Vi benytter vore regneregler og får

$$
\begin{aligned}
\widehat{\vec{a}} &= \widehat{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \\
&= \widehat{\left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}\right)} \\
&= a_1\widehat{\vec{i}} + a_2\widehat{\vec{j}} = a_1\vec{j} + a_2\left(-\vec{i}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hermed er sætningen bevist. ■

Det viser sig at størrelsen $\vec{a} \times_p \widehat{\vec{b}}$ spiller en vigtig rolle i mange sammenhænge, så før vi går videre, vil vi indføre lidt mere notation.

4 Prikprodukt

Vi vil nu definere endnu et produkt mellem vektorer. Hvor planproduktet bruges til at beregne arealer, vil vi bruge det nye produkt til at beregne længder og vinkler. Definitionen af det nye produkt kombinerer defintionerne af planprodukt og tværvektor.

Definition 15 *Ved* prikproduktet *af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ forstås planproduktet af $\vec{a}$ og tværvektoren af $\vec{b}$. I symboler ser definitionen således ud*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \times_p \widehat{\vec{b}}.$$

Andre betegnelser for prikproduktet er *skalarprodukt* og *indre produkt.*

Sætning 16 [1]*Lad* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *og* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *være vektorer. Da kan prikproduktet af de to vektorer beregnes som:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Bevis. Vi benytter definitionen

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \times_p \widehat{\vec{b}} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times_p \widehat{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times_p \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= a_1 b_2 - a_2\left(-b_2\right) \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2.
\end{aligned}
$$

Hermed er sætningen bevist. ■

For hver regneregel vi har for planproduktet har vi en tilsvarende regel for prikproduktet.

[1]Dette svarer til bogens sætning 7. Bemærk at bogen forlanger at vektorerne skal være genetlige, men det er ikke nødvendigt med det bevis som gives her. Faktisk bruger bogen at sætningen også gælder for vektorer, som ikke er egentlige i beviset for sætning 9.

Sætning 17 *For tre vektorer* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *og* $\vec{c}$ *og en konstant* $k \in \mathbb{R}$ *gælder følgende regneregler:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *(kommutativ lov).*
2. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \left(k \cdot \vec{b}\right).$
3. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ *(distributive lov).*
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Bevis. De første tre regneregler kan fås direkte ud fra tilsvarende regneregler for planprodukt. Alternativt kan man bevise dem ud fra sætning 16. Regel 1 bevises således. Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Da gælder

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \vec{b} \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Regel 2 og 3 fås tilsvarende og beviserne er skrevet ud i alle detaljer i bogen.

Den sidste regneregel fås ved at bemærke, at $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \times_p \widehat{\vec{a}}$. Prikproduktet af en vektor med sig selv er derfor lig med arealet af et kvadrat med sidelængde $|\vec{a}|$, hvilket som bekendt er $|\vec{a}|^2$. ■

Vi har defineret prikproduktet ved hjælp af planprodukt og tværvektor. Man kan i stedet gøre som bogen og udregne arealer ved hjælp af tværvektor og prikprodukt, idet der gælder

$$\vec{a} \times_p \vec{b} = \widehat{\vec{a}} \cdot \vec{b}.$$

Bogen undlader dog at navngive planproduktet til trods for at dette er betydeligt lettere at forstå geometrisk end prikproduktet.

5 Pythagoras og vektorer længder

Sætning 18 (Længdeformlen) *Lad* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. *Da er længden af* $\vec{a}$ *bestemt ved:* $|\vec{a}| = \left(a_1^2 + a_2^2\right)^{1/2}$.

Bevis. Vi ved at

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= a_1 a_1 + a_2 a_2 \\ &= a_1^2 + a_2^2. \end{aligned}$$

Formlen fås ved at tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet. ■

I bogen bruger de Pythagoras' læresætning til at bevise denne formel, men vi har vist den uden hjælp fra Pythagoras. Det er faktisk endnu bedre, idet vi nu er i stand til at give et ganske simpelt bevis for Pythagoras læresætning.

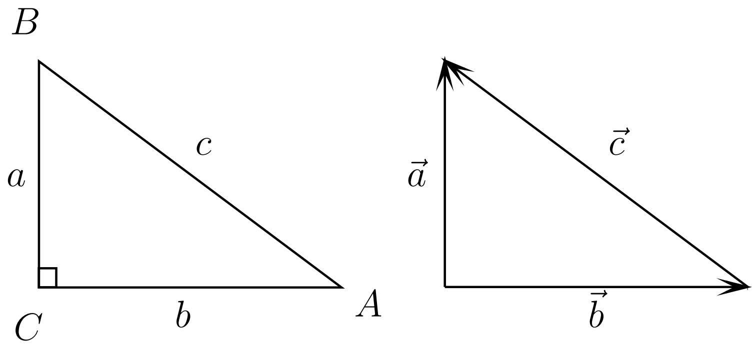


Figure 4: Retvinklet trekant og tilhørende vektorer.

Sætning 19 (Pythagoras' Læresætning) *Lad A, B og C betegne hjørnerne i en trekant, hvor $\angle C$ er ret. Lad a og b betegne længderne af kateterne og lad c betegne længden af hypotenusen. Da gælder*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Bevis. Vi indfører følgende vektorer

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} \ ,$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{CA} \ ,$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} \ ,$$

således at $a = |\vec{a}|$, $b = \left|\vec{b}\right|$ og $c = |\vec{c}|$. Da gælder $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ og dermed

$$\begin{aligned} c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c} \\ &= \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

Da trekanten er retvinklet er $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. ■

6 Cosinusrelationerne og vinkler

En vigtig egenskaber for prikproduktet er, at det kan bruges til at beregne vinkler.

Sætning 20 *Lad $\vec{a}$ og b være to egentlige vektorer. Da gælder*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(v) \,,$$

hvor $v = \angle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

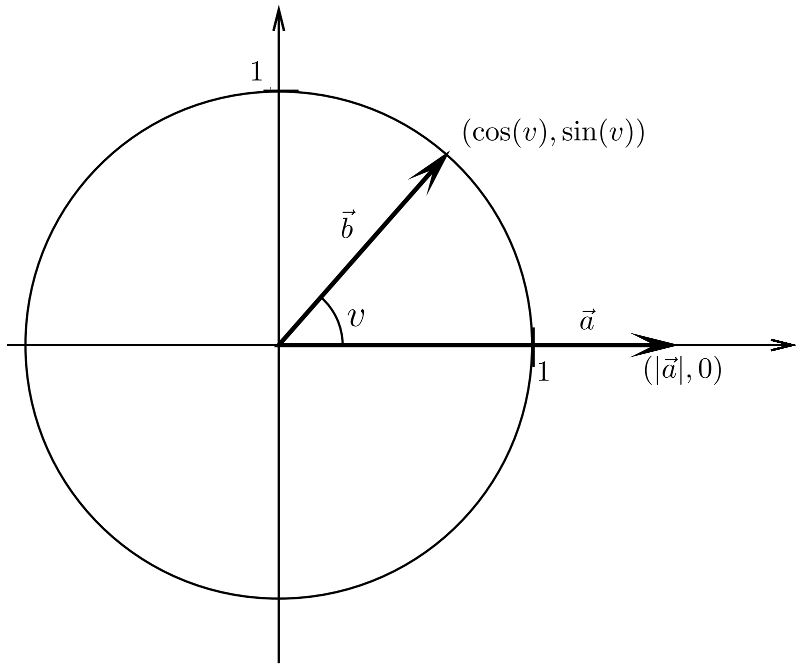


Figure 5: Enhedscirkel med vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ indtegnet.

Bevis. Vi vil først antage bevise sætningen under antagelse af at $\left|\vec{b}\right| = 1$. Vi lægger et koordinatsystem som på Figur 5, så $\vec{a}$ får koordinater $\begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$. Koordinaterne for $\vec{b}$ bliver da $\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$ og

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix} \\
&= |\vec{a}| \cdot \cos v + 0 \cdot \sin v \\
&= |\vec{a}| \cos v \ .
\end{aligned}
$$

For en vilkårlig vektor $\vec{b}$ gælder, at vektoren $\frac{\widehat{\vec{b}}}{|\vec{b}|}$ har længde 1. Derfor gælder

$$\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = |\vec{a}| \cos v.$$

Vi ganger med på begge sider af lighedstegnet med $\left|\vec{b}\right|$, hvilket beviser sætningen. ■

Sætning 21 (Cosinus-relationerne) *Lad A, B og C betegne hjørnerne i en*

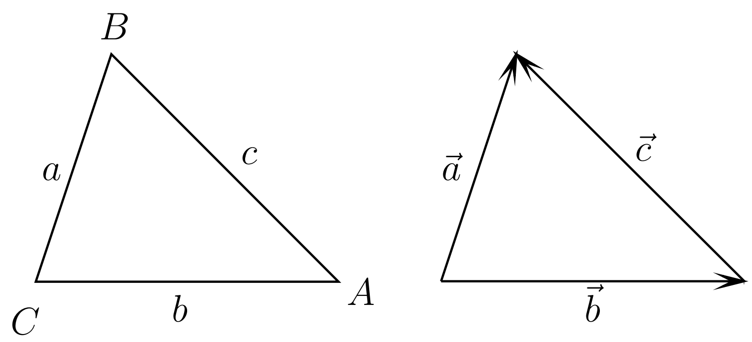


Figure 6: Trekant og tilhørende vektorer.

trekant. Lad a, b og c betegne længderne af de tilsvarende sider. Da gælder

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A)\,, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle B)\,, \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)\,.
\end{aligned}
$$

Bevis. Vi viser kun den sidste ligning, idet de øvrige vises på samme måde. Vi indfører følgende vektorer

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \overrightarrow{CB}\,, \\
\vec{b} &= \overrightarrow{CA}\,, \\
\vec{c} &= \overrightarrow{AB}\,,
\end{aligned}
$$

således at $a = |\vec{a}|$, $b = \left|\vec{b}\right|$ og $c = |\vec{c}|$. Da gælder $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ og dermed

$$
\begin{aligned}
c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} &= \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C)\,,
\end{aligned}
$$

hvilket beviser sætningen. ■