Logik

Af Peter Harremoës
Niels Brock

December 2009

1 Indledning

Disse noter om matematisk logik er en videreudbygning af det, som står i bogen MAT A [1]. Vi vil her gå lidt mere systematisk frem og være lidt mere præcise, men Mat A bogen giver en udemærket introduktion og motivation for at beskæftige os med matematisk logik. Hvis man er interesseret i at læse mere om logik på dansk, kan man læse bogen *Moderne elementær logik [3].* Denne bog er mest filosofisk orienteret. For brug i matematik er bogen *Logic for Mathematicians [2]* mere relevant. Denne fremstilling bygger dog på mange ande kilder end de ovennævnte bøger.

2 Udsagn

Et udsagn er en ytring noget, som kan antage en af to værdier. I logik kaldes disse værdier sand og falsk. Enhver ytring vil naturligvis blive sagt eller skrevet i en bestemt person i en bestemt situation. Tolkningen af udsagnet vil afhænge af situationen. Med mindre vi kender konteksten kan det derfor være svært at tillægge et udsagn en sandhedsværdi.

Eksempel 1 *Udsagnet "Månen er lavet af grøn ost" vil vi tildele sandhedsværdien falsk. Udsagnet "manden hedder Søren" har ikke på samme måde en bestemt sandhedsværdi. Sandhedsværdien vil afhænge af hvem vi henviser til, når vi siger "manden".*

Hvad man mener med ordet sand, er noget som har optaget filosofer i årtusinder, men er faktisk ikke så interessant for den teori vil skal kigge på.

Følgende definition står ikke bogen Mat A, men burde gøre det noget noget klarere hvordan hvordan begrebet logisk ækvivalens skal forstås.

Definition 2 *Ved en udsagnsform vil vi forstå et udsagn skrevet på en bestemt måde. En udsagsform er med andre ord en sekvens af symboler (bogstaver, tal, matematiske og logiske symboler osv.). To udsagnsformer siges at være logisk ækvivalente dersom de har samme sandhedstabel.*

Hvis P og Q betegner udsagn, skal vi ifølge ovenstående definition opfatte $P \wedge Q$ og $(P \wedge Q)$ som forskellige udsagnsformer, som er ækvivalente.

Opgave 3 *Vis at P er logisk ækvivalent med $\neg(\neg P)$.*

Opgave 4 *Vis de Morgans regler*

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \ ,$$
$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q) \ .$$

Opgave 5 *Vis de kommutative, associative og distributive love:*

$$
\begin{aligned}
A \wedge B &= B \wedge A \ , \\
A \vee B &= B \vee A \ , \\
(A \wedge B) \wedge C &= A \wedge (B \wedge C) \ , \\
(A \vee B) \vee C &= A \vee (B \vee C) \ , \\
A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C) \ , \\
A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \ .
\end{aligned}
$$

Opgave 6 *Vis at*

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg B) \Rightarrow (\neg A) \ .$$

Opgave 7 *Vis at hvis $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow C$ så gælder også $A \Rightarrow C$.*

Da de associative regler gælder vil vi fremover udelade de tilsvarende paranteser. Vi vil også indføre den konvention at $\neg$ kun virker på det umiddelbart efterfølgende udsagn i en udsagnsform med mindre der står en parantes. Vil vi således opfatte $\neg A \wedge B$ som ækvivalent med $(\neg A) \wedge B$ fremfor $\neg (A \wedge B)$

2.1 Logiske konnetiver og ligninger

Det er ret udbredt at bruge symbolerne $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee$ osv. ved løsning af ligninger. Tegnene benyttes især ved beregninger på tavle hvor symbolerne benyttes som en slags stenografi. Her er det dog vigtigt at huske at symbolerne giver en præcisering af dagligsprogets konnektiver men alle de fordele og ulemper det giver. Ulempen er at man skal være mere prcis for ikke at komme til at bruge symbolerne forkert. Dagligsprogets konnektiver er ofte ikke helt præcise og dermed åbne over for en vis fortolkning. Omvendt vil de logiske konnektiver kunne bruges til at give et godt overblik over beregningerne. Lad os som eksempel tage løsning af en 2.-gradsligning.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 6x + 8 &= 0 \\
&\Updownarrow \\
x^2 - 6x + 9 - 1 &= 1 \\
&\Updownarrow \\
(x-3)^2 - 1 &= 0 \\
&\Updownarrow \\
((x-3)+1)((x-3)-1) &= 0 \\
&\Updownarrow \\
(x-3)+1 &= 0 \vee (x-3) - 1 = 0 \\
&\Updownarrow \\
x &= 2 \vee x = 4.
\end{aligned}
$$

En løsning til en ligning vil sige et x, som gør ligningen til et sandt udsagn. Vi er interesseret i at omforme ligningen i et antal skrit således at løsningsmængden ikke ændrer sig under vejs. Idet vi har brugt tegnet $\Leftrightarrow$ korrekt fra top til bund, må der også gælde at x gør den først linje sand netop vis x gør den sidste linje sand. I dagligdags sporg vil det være helt legalt at sige "ligningen har løsningerne 2 og 4". Det er dog tydeligt, at dagligdagssprogets "og" i dette tilfælde skal oversættes til $\vee$ og ikke til $\wedge$, som man måske kunne være fristet til. Der kan jo ikke være tale om at x både er lig med 2 og er lig med 4.

2.2 Normalform

Vi skal nu se at enhver tænkelig sandhedstabel er sandhedstabel for en udsagnsform, som kun indeholder konnektiverne $\neg, \wedge$ og $\vee$. I stedet or at skrive et formelt bevis vil vi give et eksempel som illustrerer princippet.

Vi betragter sandhedstabellen

A	B	C	
s	s	s	f
s	s	f	s
s	f	s	f
s	f	f	f
f	s	s	s
f	s	f	f
f	f	s	f
f	f	f	s

Vi leder efter en udsagnsform dannet af A, B og C samt konnektiverne $\neg, \wedge$ og $\vee$, så sidste søjle i tabellen bliver sandhedstabellen for denne udsagnsform. Vi ser at udsagnsformen skal være sand i tre tilfælde. Det første tilfælde er hvis A er sand, B er sand og C er falsk, eller med andre ord at $A \wedge B \wedge (\neg C)$ skal være sand. Den anden mulighed er at . Den sidste mulighed er at $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$. Da netop disse tre muligheder skal give sand og alle andre skal give falsk, kan vi tage disjunktionen af mulighederne

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \ ,$$

hvilket netop en udsagnsform som giver den ønskede sandhedstabel.

Enhver udsagnsform har en sandhedstabel, er enhver udsagnsform ækvivalent en sådan disjunktion af konjunktioner. En udsagnsform omskrevet på denne måde siges at være på disjunktiv normalform. Man kan sige at disjunktiv normalform er en anden måde at skrive en sandhedstabel på.

Opgave 8 *Omskriv udsagnsformen* $\neg(A \vee \neg(B \vee \neg C))$ *til disjunktiv normalform ved hjælp af de distributive love og de Morgans regler.*

2.3 Tilstrækkelige mængder af konnektiver

I bogen blev $A \iff B$ defineret som værende ækvivalent med $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Det er imidlertid ikke det eneste konnektiv som kan defineres ud fra andre konnektiver.

Opgave 9 *Vis*

$$A \Rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B.$$

Definition 10 *En tilstrækkelig mængde af konnektiver er en mængde sådan at enhver sandhedsfunktion kan repræsenteres ved en udsagnsform, som kun indeholder konnektiver fra denne mængde.*

En af konsekvenserne af den foregående afsnit er, at $\{\neg, \wedge, \vee\}$ er en tilstrækkelig mængde af konnektiver. Dette resultat kan bruges til at finde andre tilstrækkelige mængder af konnektiver.

Sætning 11 *Mængderne* $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}$ *og* $\{\neg, \Rightarrow\}$ *er tilstrækkelige mængder af konnektiver.*

Bevis. Enhver udsagnsform kan skrives på disjunktiv normalform. Da $A \vee B$ er logisk ækvivalent med $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ findes der en udsagnsform som er logisk ækvivalent med den disjunktive normalform men kun indeholder $\neg$ og $\wedge$.

Enhver udsagnsform kan skrives på disjunktiv normalform. Da $A \wedge B$ er logisk ækvivalent med $\neg(\neg A \vee \neg B)$ findes der en udsagnsform, som er logisk ækvivalent med den disjunktive normalform men kun indeholder $\neg$ og $\vee$.

Da enhver udsagnsform er logisk ækvivalent med en udsagnsform som kun indeholder $\neg$ og $\vee$, og da $A \vee B$ er logisk ækvivalent med $(\neg A) \Rightarrow B$, er enhver udsagnsform logisk ækvivalent med en udsagnsform som kun indeholder $\neg$ og $\Rightarrow$. ■

Eksempel 12 *Udsagnsformen* $((\neg A) \vee B) \Rightarrow C$ *er logisk ækvivalent med hver af følgende udsagnsformer:*

- $\neg((\neg A) \vee B) \vee C.$
- $\neg(\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg C).$
- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C.$

Fra konnektiverne $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ og $\Leftrightarrow$ har vi set tre måder at vælge et tilstrækkeligt par. Ingen andre par er tilstrækkelige. For at se det betragt først mængden $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ af konnektiver. Vi kan nu spørge om udsagsformen som kun antager værdien f kan udtrykkes ved hjælp af disse konnektiver. Dette er imidlertid ikke muligt, idet udsagnsformen, som kun indeholder konnektiver fra $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, altid vil have sandhedsværdien s, hvis alle de udsagn som indgår har værdien s. Derfor er hverken $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ eller nogen af dens delmængder tilstrækkelig.

Opgave 13 *Vis at mængden $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ ikke er tilstrækkelig.*

Der findes andre konnektiver. Faktisk definerer enhver sandhedstabel et konnektiv, men de fleste konnektiver defineret ud fra sandhedstabeller svarer ikke til noget begreb, som er kendt fra dagligsproget.

Gensidig afvisning Dette konnektiv betegnes $\downarrow$ og har sandhedstabellen

A	B	$A \downarrow B$
s	s	f
s	f	f
f	s	f
f	f	s

Udsagnsformen $A \downarrow B$ svarer i dagligdagssprog ret godt til "hverken A eller B".

Alternativ afvisning Dette konnektiv betegnes $|$ og har sandhedstabellen

A	B	$A\|B$
s	s	f
s	f	s
f	s	s
f	f	s

Dette konnektiv svarer ikke rigtigt til noget dagligdagsudtryk på dansk. Det nærmeste man kommer er "A og B er ikke begge sande".

Vores interesse for konnektiverne $\downarrow$ og $|$ skyldes primært følgende sætning.

Sætning 14 *Hver af mængderne $\{\downarrow\}$ og $\{|\}$ er en fuldstændig mængde af konnektiver.*

Bevis. Vi vil starte med at vise at mængden $\{\downarrow\}$ er fuldstændig. Først bemærker vi at $\neg A$ er logisk ækvivalent med $A \downarrow A$. Endvidere er $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$ logisk ækvivalent med $A \wedge B$. Da $\{\neg, \wedge\}$ er en fuldstændig mængde af konnektiver, gælder det samme for $\{\downarrow\}$.

Vi vil nu vise at mængden $\{|\}$ er fuldstændig. Som ovenfor danner vi først $A|A$ og ser at denne udsagnsform er logisk ækvivalent med $\neg A$. Udsagnsformen $(A|A)\,|\,(B|B)$ er logisk ækvivalent med $A \vee B$. Da $\{\neg, \vee\}$ er en fuldstændig mængde af konnektiver, gælder det samme for $\{\downarrow\}$. ■

Opgave 15 *Skriv udsagnsformen $A \Rightarrow B$ ved udelukkende ved brug af gensidig afvisning.*

Opgave 16 *Skriv sandhedstabeller for $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$.*

Bevis. I nogen tilfælde, hvor en størrelse kan antage to værdier kan vi vælge at kalde den ene "sand" og den anden "falsk". I en tændt computer vil en given ledning have en spænding på enten 0,5 Volt eller på 5 Volt. Man vil da normalt identificere 0,5 V med tallet 0 og 5 V med tallet 1, men vi kunne lige så godt kalde dem "sand" og "falsk". i computeren vil et konnektiv være en elektronisk komponent som laver en kombination af inputs om til et bestemt output. En mængde af konnektiver er fuldstændig, hvis komponenterne er i stand til at producere et vilkårligt ønskeligt output med netop disse komponenter til rådighed. Komponenten svarende til $\downarrow$ kaldes f.eks. en nor-gate og resultatet er at en vilkårlig kompliceret komputer i princippet kunne bygges med denne ene komponen og tilstrækkelig store mængder ledning. ■

3 Aksiomatisk struktur

Hidtil har vi brugt sandhedstabeller til at afgøre hvilke udsagsformer, der er tautologier. Fra sandhedstabellerne har vi udledt er række regler såsom de Morgans regler. Nu er det imidlertid sådan at nogle af reglerne kan anses for at være mere fundamentale end andre i den forstand, at de øvrige regler kan bevises ved hjælp af de fundamentale regler. Hvad vi vælger at anse for at være fundamentale regler er langt hen af vejen et valg vi skal gøre. I andre fremstillinger end denne, vil valget af fundamentale regler være anderledes end vores valg.

3.1 Syntaks

Vi starter med at beskrive, hvilke slags udtryk vi er interesserede i. Vi betragter en mængde G, som har to regneoperationer som vi betegner $\wedge$ og $\vee$. Det vil sige, at for g_1 og g_2 i G betegner $g_1 \wedge g_2$ og $g_1 \vee g_2$ nye elementer i G. Vi vil bruge det sædvanlige lighedstegn $=$ til at angive at to elementer er ens. Vi vil bruge paranteser på sædvanlig vis, $g_1 \vee (g_2 \wedge g_3)$ betyder at vi først skal udregne $h = g_2 \wedge g_3$ og derefter $g_1 \vee h$.

Denne syntaks forudsætter naturligvis at vi er fortrolige med begrebet mængde og relationen $=$. Hvis disse begreber ikke forudsættes kendte, skal man starte med noget andet som er kendt.

3.2 Gitre

Et aksiom er en fundamental regel som vi benytter til at udlede andre regler fra. Ordet er græsk og betyder egentlig "oplagt", men nutildags kræver vi ikke at aksiomer skal være oplagte.

Aksiom 17 *Regneoperationerne $\wedge$ og $\vee$ opfylder følgende aksiomer*

$$\begin{array}{lll} A \wedge B = B \wedge A & A \vee B = B \vee A & \textit{kommutative love} \\ (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) & (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) & \textit{associative love} \\ (A \vee B) \wedge A = A & (A \wedge B) \vee A = A & \textit{absorbstionslove} \\ A \wedge A = A & A \vee A = A & \textit{idempotente love} \end{array}.$$

En matematisk struktur, som opfylder disse regler, kaldes et gitter. I stedet for at kalde det aksiomer, kunne man sige, at vi har lavet en definition af hvad det vil sige at en matematisk struktur er et gitter.

Det er let at checke at udsagnslogik udgør et gitter, hvis vi opfatter ækvivalente udsagnsformer som identiske (vi har identificeret ækvivalente udsagnsformer). Vi skal blot checke at vi får tautologier, hvis vi erstatter lighedstegnene med $\Leftrightarrow$. Der er imidlertid andre interessante matematiske strukturer, som er gitre.

Eksempel 18 *Lad L betegne de naturlige tal og lad $\vee$ betegne mindste fælles multiplum. For naturlige tal m, n er $m \vee n$ det mindste tal som både m og n går op i. Således er $15 \vee 9 = 45$ idet 45 er det minste tal som både 5 og 9 går op i. Vi lader $\wedge$ betegne største fælles divisor. Således er $15 \wedge 9 = 3$ idet 3 er det største tal som går op i både 15 og 9. Det er lige til at checke at vi får et gitter på denne måde.*

Definition 19 *Vi skriver $A \preceq B$ dersom $A \wedge B = A$.*

Sætning 20 *For alle $A, B, C \in G$ gælder*

$$A \preceq A,$$

og hvis

$$A \preceq B \text{ og } B \preceq C$$

så gælder

$$A \preceq C.$$

Endelig gælder at hvis $A \preceq B$ og $B \preceq A$ så er $A \preceq B$ og $A = B$.

Opgave 21 *Bevis denne sætning.*

Hvis G er en endelig mængde, så findes et mindste element, som vi vil kalde $\perp$, og et største element, som vi vil kalde $\top$. Disse svarer til en kontradiktion og en tautologi.

Eksempel 22 *De naturlige tal med gitterstruktur som beskrevet betyder $m \preceq n$ at m går op i n. Tallet 1 er mindre end alle andre naturlige tal idet 1 går op i alle andre tal. Der er intet største element. Der gælder hverken $3 \preceq 5$ eller $5 \preceq 3$ idet 3 ike går op i 5 og 5 ikke går op i 3.*

3.3 Boolske algebraer

Vi indfører nu et antal definitioner for at få et mere nuanceret sprog til at tale om gitre.

Definition 23 *Et gitter siges at være distributivt dersom*

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \qquad \wedge \text{ er distributiv over } \vee$$
$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad (\vee \text{ er distributiv over } \wedge)$$

Definition 24 *Et endeligt gitter siges at være ortofuldstændig dersom der findes en afbildning* $\neg : G \to G$ *der opfylder*

$$A \vee \neg A = \top \text{ og } A \wedge \neg A = \bot.$$

Definition 25 *Et endeligt gitter siges at være en Boolsk algebra dersom det er distributivt og ortofuldstændigt.*

Ved hjælp af sandhedstabeller kan vi se at udsagnslogik udgør en Boolsk algebra, men vi kender andre eksempler.

Eksempel 26 *Lad* M *være en mængde og lad* G *betegne mængden af delmængder af* M*. Da er* G *en Boolsk algebra hvor* $\wedge$ *identificeres med* $\cap$ *(fællesmængde) og* $\vee$ *identificeres med* $\cup$ *(foreningsmængde). At* $A \preceq B$ *betyder at* $A \subseteq B$ *(*A *er en delmængde af* B*). I dette gitter vil* $\neg A$ *blive identificeret med komplementærmængden* $\complement A$*, hvilket er mængden af elementer i* M *som ikke er element i* A*. Endvidere er* $\bot$ *lig med* $\varnothing$ *og* $\top$ *er lig* M*.*

Teorien for Boolske algebraer er således ikke kun en teori for udsagnslogik, men kan også bruges til at beskrive andre strukturer. Med dette system af aksiomer og definitioner vil vi nu gå i gang med at afklare en række vigtige spærgsmål, som vi giver overskrifterne: konsistens, fuldstændighed og uafhængighed.

3.4 Konsistens

Et system af aksiomer og definitioner siges af være konsistent dersom det er uden indre modsigelser. Hvis systemet af aksiomer og definitioner indeholdt indre modsigelser, ville der slet ikke være nogen matematiske strukturer, som levede op til systemet af aksiomer og definitioner. Hvis vi så alligevel lod somom systemet var konsistent, ville vi kunne bruge systemet til at bevise absurditeter. Fra disse absurditeter ville vi kunne bevise andre absurditeter og hele matematiken kunne blive inficeret. For at vise at aksiomerne og definitionerne for Boolske algebraer er konsistent, er det tilstrækkeligt at finde en struktur som er en Boolsk algebra. Vi tager en mængde M med 1 element. Denne har de to delmængder M og $\varnothing$. Vi kan skrive regneoperationerne ud i alle detaljer:

$\cup$	$\varnothing$	M
$\varnothing$	$\varnothing$	M
M	M	M

$\cap$	$\varnothing$	M
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
M	$\varnothing$	M

og $\complement\varnothing = M$ og $\complement\varnothing = M$. Det er ligetil at checke at de forskellige regler der skal gælde for Boolske algebraer er opfyldte. Aksiomer og definitioner for Boolske algebraer er dermed konsistente.

Hvis vi tilføjede et aksiom, der sagde at

$$A \wedge B = A \text{ eller } A \wedge B = B$$

ville systemet af aksiomer og definitioner stadig være konsistent, idet dette faktisk gælder for den Boolske algebra af delmængder af en mængde med et element. Et sådant aksiom ville faktisk medføre at den Boolske algebra kun havde to elementer.

Hvis vi tilføjede et aksiom der sagde, at der findes et $A \in G$ så

$$A \vee \top \text{ er forskellig fra } \top$$

så ville vi få et inkonsistent system. Ud fra dette system ville man kunne udlede hvadsomhelst.

3.5 Fuldstændighed

Vi har på den ene side udsagnslogik og på den anden side Boolsk algebra. I udsagnslogik kan vi checke om et udtryk er en tautologi ved hjælp en sandhedstabel. I Boolsk algebra har vi et antal aksiomer og definitioner, og ud fra disse kan vi udlede at visse udtryk er lig med $\top$. Spørgsmålet er nu om alt hvad der er sandt i udsagnslogik kan udledes ud fra de få aksiomer og definitioner som bruges til at karakterisere en Boolsk algebra. Hvis dette er tilfældet siger vi at aksiomerne og definitionerne tilsammen udgør en fuldstændig aksiomatisering af udsagnslogik. Det vil vi nu gå i gang med at vise ved at bevise en række sætninger.

Først et par ord om sætninger og beviser. En sætning er et udsagn som indeholder nogle premisser og en konklusion. Beviset for sætningen en en sekvens af udsagn. De første udsagn i et bevis er premisserne. Det sidste udsagn i et bevis er konklusionen. Ethvert udsagn efter premisserne i et bevis følger umiddelbart af de foregënde udsagn i beviset. At checke at et bevis er korrekt er derfor i princippet en nærmest mekanisk procedure som kan foretages uden nærmere indsigt i emnet. At lave et bevis vil derimod ofte kræve en del indsigt.

Sætning 27 *Lad A og B være elementer i en Boolsk algebra. Hvis $A \wedge \neg B = \bot$ og $A \vee \neg B = \top$, så er $A = B$.*

Bevis. Antag at $A \wedge \neg B = \bot$ og $A \vee \neg B = \top$. Nu gælder

$$B = B \wedge (B \vee \neg B)$$

ifølge loven om absorbtion. Da $B \vee \neg B = \top$ gælder også

$$B = B \wedge \top.$$

Ifølge en af vore præmisser gælder $A \vee \neg B = \top$, så

$$B = B \wedge (A \vee \neg B).$$

De distributive love medfører at

$$B = (B \wedge A) \vee (B \wedge \neg B)\,.$$

Heraf ses at

$$B = (B \wedge A) \vee \perp.$$

Ifølge en af vore præmisser gælder $A \wedge \neg B = \perp$ så

$$B = (B \wedge A) \vee (A \wedge \neg B)\,.$$

Ifælge de kommutative love gælder $B \wedge A = A \wedge B$ så

$$B = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)\,.$$

Ved hjælp af de distributive love får vi

$$B = A \wedge (B \vee \neg B)\,.$$

Nu gælder $B \vee \neg B = \top$ og dermed

$$B = A \wedge \top.$$

Ved brug af ligningen $\top = A \vee \neg A$ fås

$$B = A \wedge (A \vee \neg A)\,.$$

Endelig giver absorbtionsloven at

$$B = A.$$

■

Ofte vil man skrive beviser i mere kompakt form, hvor nogen af ledene i beviset springes over. Læseren forventes da selv at kunne fylde hyllerne ud. Pointen er imidlertid, at ethvert bevis i princippet kan skrives så detaljeret ned, at enhver kan checke det. Hvis man derfor støder på et bevis "man ikke forstår" vil det være mere præcist at sige at man ikke selv er i stand til at fylde hullerne ud. En kortere version af ovenstående bevis kunne se således ud:

$$\begin{aligned}
B &= B \wedge (B \vee \neg B) \\
&= B \wedge (A \vee \neg B) \\
&= (B \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \\
&= (B \wedge A) \vee (A \wedge \neg B) \\
&= A \wedge (B \vee \neg B) \\
&= A \wedge (A \vee \neg A) \\
&= A.
\end{aligned}$$

De efterfølgende beviser vil ikke blive skrevet ud i alle detaljer.

Sætning 28 *Lad A være element i en Boolsk algebra. Da er $\neg(\neg A) = A$.*

Bevis. Vi benytter ortofuldstændighed på $\neg A$ og får

$$\neg A \vee \neg(\neg A) = \top \quad \neg A \wedge \neg(\neg A) = \bot \ .$$

Kommutativitet giver da

$$\neg(\neg A) \vee \neg A = \top \quad \neg(\neg A) \wedge \neg A = \bot \ .$$

Resultatet følger nu ved brug af Sætning 27. ■

Sætning 29 *De Morgans regler gælder i enhver Boolsk algebra.*

Bevis. Vi vil vise, at $\neg(C \vee D) = \neg C \wedge \neg D$. Vi kalder $\neg C \wedge \neg D$ for A og $\neg(C \vee D)$ for B. For at vise at $A = B$ er det ifølge sætning 27 tilstrækkeligt at vise at

$$A \wedge \neg B = \bot \text{ og } A \vee \neg B = \top.$$

Først bemærker vi at $\neg B = C \vee D$. Vi vil nu vise at $A \wedge \neg B = \bot$. Vi har

$$\begin{aligned} A \wedge \neg B &= (\neg C \wedge \neg D) \wedge (C \vee D) \\ &= ((\neg C \wedge \neg D) \wedge C) \vee ((\neg C \wedge \neg D) \wedge D) \\ &= ((\neg C \wedge C) \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge (\neg D \wedge D)) \\ &= (\bot \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge \bot) \\ &= \bot \vee \bot \\ &= \bot. \end{aligned}$$

Tilsvarende kan vi vise at $A \vee \neg B = \top$. Det foregår som følger

$$\begin{aligned} A \vee \neg B &= (\neg C \wedge \neg D) \vee (C \vee D) \\ &= (\neg C \vee (C \vee D)) \wedge (\neg D \vee (C \vee D)) \\ &= ((\neg C \vee C) \vee D) \wedge ((\neg D \vee D) \vee C) \\ &= (\top \vee D) \wedge (\top \vee C) \\ &= \top \wedge \top \\ &= \top. \end{aligned}$$

Beviset for at $\neg(C \wedge D) = \neg C \vee \neg D$ foregår på samme måde. ■

Med de aksiomer, definitioner og sætninger vi nu har til rådighed kan ethvert nok så kompliceret udtryk omskrives til disjunktiv normalform. Hvis udtrykket er en tautologi, kan disjunktiv normalform herefter vises at være lig med $\top$.

3.6 Uafhængighed

Vi har set at aksiomerne og definitionerne for Boolske algebraer er tilstrækkelige til bevise alle sande sætninger i udsagnslogik. Spørgsmålet er om de alle er nødvendige eller om nogle kunne udelades. Da alle aksiomer og definitioner giver sande egenskaber for Boolske algebraer, er spørgsmålet om en af vil kunne bevises ud fra de andre. Hvis ingen kan bevises ud fra de andre siges de enkelte aksiomer og definitioner at være uafhængige.

Sætning 30 *Lad G være et gitter i hvilket der gælder*

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

for alle $A, B, C \in G$. Da gælder også

$$U \vee (V \wedge W) = (U \vee V) \wedge (U \vee W)$$

for alle $U, V, W \in G$.

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned}(U \vee V) \wedge (U \vee W) &= ((U \vee V) \wedge U) \vee ((U \vee V) \wedge W) \\ &= U \vee ((U \wedge W) \vee (V \wedge W)) \\ &= (U \vee (U \wedge W)) \vee (V \wedge W) \\ &= U \vee (V \wedge W)\,.\end{aligned}$$

■

Det viser sig at de øvrige aksiomer og defintioner er uafhængige. At bevise uafhængighed består i et aksiom og erstatter det sit negerede. Det fremkomne system skal så vises at være konsistent, hvilket gøres ved at finde en matematisk struktur som opfyder netop disse aksiomer. Dette skal gøres for hvert enkelt aksiom.

References

[1] P. Bregendal, S. Nitschky Schmidt og *L*. Vestergaard, MAT A. Systime, 2007.

[2] A. G. Hamilton, Logic for Mathematicians. Cambridge University Press, anden og reviderede udgave 1988.

[3] V. F. Hendricks og S. A. Pedersen, Moderne elementær logik. Høst Humaniora, 2002.