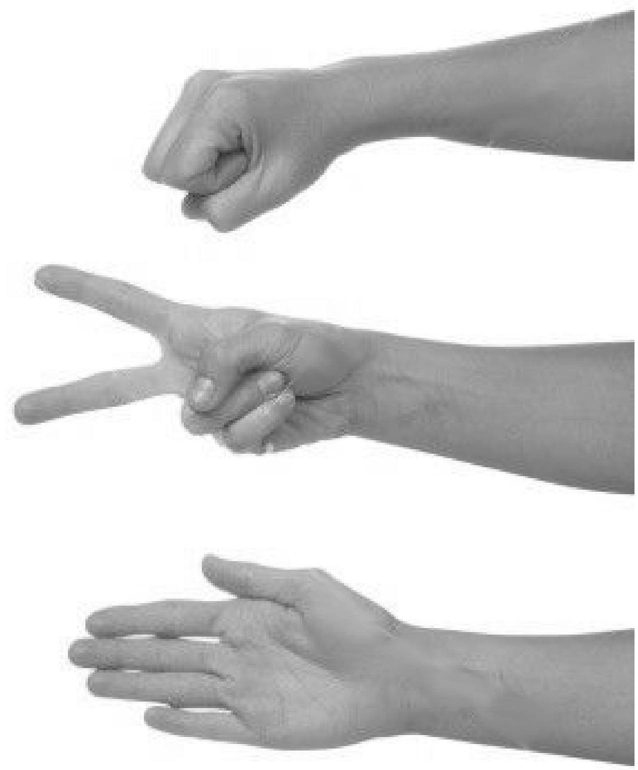
Spil- og beslutningsteori



Peter Harremoës
Niels Brock

26. november 2010

1 Beslutningsteori

De økonomiske optimeringssituationer, vi har set på hidtil, har været helt deterministiske. Det vil sige at vores gevinst har været fuldstændigt bestem af faktorer vi kendte eller vi har haft kontrol over. Her skal vi se på situationer, hvor der indgår usikkerhed. Her er lidt eksempler på hvordan usikkerhed kan komme ind i billedet.

Måleusikkerhed Selvom vi prøver at lave præcise observationer af den verden, som omgiver os, vil selve observations- eller måleprocessen give anledning til større eller mindre usikkerhed.

Tilfældighed Verden, som omgiver os, er delvis styret af faktorer som i praksis er umulige at forudsige. I spil kan det være terningkast.

Andres beslutninger Ofte vil vi blive påvirket af andre personers beslutninger. Disse personer har somme tider en direkte interesse i at holde deres beslutninger hemmelige længst muligt.

Der findes forskellige måder at træffe beslutninger i situationer med usikkerhed. I Mat A er forskellige beslutningskriterier beskrevet men uden at der kommer nogle interessante konklusioner ud af det. Her er de vigtigste:

Maximax-kriteriet Optimisten vælger den beslutning, som potentielt giver størst afkast.

Maximin-kriteriet Pessimisten vælger den beslutning, hvor risikoen er mindst.

Laplace-kriteriet Hvis man kender en sandsynlighedsfordeling over de usikre hændelser, som influerer på vores beslutning, så kan man maksimere sin middelgevinst. Hvis der tages beslutninger mange gange på dette grundlag vil den med stor sandsynlighed give den største samlede gevinst.

Vi skal se at i de såkaldte to-personers nulsumsspil, vil en blanding af de to sidste kriterier i en helt præcis forstand være det optimale.

Definition 1 *En strategi siges at* dominere *en anden strategi, hvis den aldrig er dårligere. En strategi siges at* dominere *en anden strategi* strengt*, hvis den altid er decideret bedre.*

Det første vi vil gøre, hvis vi får forelagt et beslutningsproblem, vil være at fjerne alle dominerede strategier. Uanset hvilket af bogens beslutningskriterie man benytter, vil strengt dominerede strategier aldrig spille nogen rolle.

2 Flerpersoners spil

Beslutningsteori bliver først rigtigt interessant i situationer, hvor flere skal træffe beslutninger samtidigt, hvilket vi nu skal se på. Vi tænker os et antal personer, som hver kan træffe en beslutning. Disse personer vil vil kalde spillere. Hver spiller har sin egen kriteriefunktion og værdien af kriteriefunktionen afhænger af hvad hver enkelt spillers strategi (vi vil i almindelighed kalde de forskellige mulige beslutninger for strategier).

Eksempel 2 (Fangernes Dilemma) *To mistænkte, Anders og Børge, er blevet anholdt af politiet. Anders og Børge holdes adskilt, så de ikke kan kommunikere. Politiet har ikke beviser nok til at få dem dømt for deres grove forbrydelse, men politiet kan få de mistænkte fængslet i et halvt år for en mindre forbrydelse. Da historien foregår i USA, vil politiet slå en handel af med de mistænkte: hver af dem kan vælge at forråde den anden eller holde mund. Hvis begge holder mund, får de hver et halvt års fængsel. Hvis den ene forråder den anden og den anden holder mund, slipper forræderen fri og den anden får ti års fængsel. Hvis de forråder hinanden, får de hver fem års fængsel. Skal de mistænkte forråde hinanden, eller skal de holde tæt?*

Payoff for Anders	*Børge holder tæt*	*Børge synger*
Anders holder tæt	$-1/2$	-10
Anders synger	0	-5

Payoff for Børge	*Børge holder tæt*	*Børge synger*
Anders holder tæt	$-1/2$	0
Anders synger	-10	-5

For Anders er det at holde tæt domineret af at forråde Børge. For Børge er det at holde tæt domineret af at forråde Anders. Derfor vælger de begge at forråde den anden og de får begge 5 års fængsel. Hvis de kunne samarbejde om at holde tæt ville de hver slippe med $1/2$ års fængsel.

For mere komplicerede spil kan det være nødvendigt at fjerne dominerede strategier i flere omgange.

Eksempel 3 (Gæt et tal) *Et antal personer skal hver beslutte sig for et reelt tal i intervallet $[0;100]$. Man udregner gennemsnittet af de valgte tal. Den hvis gæt er tættest på $2/3$ af gennemsnittet, vinder en præmie. De andre vinder ikke noget.*

Da gennemsnittet af nogle tal i intervallet $[0;100]$ selv må ligge i dette interval må $2/3$ af gennemsnittet ligge i $\left[0;66\frac{2}{3}\right]$. Hvis man er rationel kan alle tal over $66\frac{2}{3}$ udelukkes idet de som strategier er domineret af tallet $66\frac{2}{3}$. Hvis alle er rationelle, vil alle derfor vælge tal fra intervallet $\left[0;66\frac{2}{3}\right]$.

Hvis man ved, *at de andre er rationelle ved man også at gennemsnittet må ligge i $\left[0;66\frac{2}{3}\right]$, så $2/3$ af gennemsnittet må ligge i $\left[0;\frac{2}{3}\cdot 66\frac{2}{3}\right]$. Da vil alle alle tal over $\frac{2}{3}\cdot 66\frac{2}{3} = 44\frac{4}{9}$ være domineret og kan udelukkes. Hvis alle ved at de andre er rationelle derfor kun vælge tal fra intervallet $\left[0;44\frac{4}{9}\right]$.*

Sådan kan man blive ved, så hvis alle er rationelle og alle ved at de andre er rationelle og alle ved at alle ved at de andre er rationelle osv. så vil alle tal over 0 kunne udelukkes og der er så kun tilbage at alle vælger 0.

Figur 1: John F. Nash (f. 1928) omkring 1994, hvor han modtog Nobel-prisen.

Definition 4 *Et sæt* $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$ *af strategier for Spiller 1, Spiller 2,..., Spiller n siges at udgøre en* Nash-ligevægt*, dersom inges spiller ville vinde noget ved at ændre sin strategi forudsat at de øvrige holdt fast i deres strategier.*

I Fangernes Dilemma udgør (syng,syng) en Nash-ligevægt. I Gæt et Tal udgør (0,0,0,. . . ,0) en Nash-ligevægt. Hvis et spil har en *entydigt* bestemt Nash-ligevægt, vil det mest rationelle for alle spillere være at spille denne strategi.

Eksempel 5 *Hver dag skal et stort antal pendlere fra Avnstrup til Bjergby. Der er to store veje mellem byerne. Den ene går gennem Nørre Mellemby og den anden går gennem Sønder Mellemby. Der er en bred vej fra Avnstrup til Nørre Mellemby som det tager en time at køre. Tilsvarende er der en bred vej fra Sønder Mellemby til Bjergby som det også tager 1 time at køre. Fra Avnstrup til Sønder Mellemby er der en smal men mere direkte vej. Det tager* $30 + 30x$ *minutter at tage denne rute hvor x er den procentvise andel af biler, som tager denne vej. Tilsvarende er der fra Nørre Mellemby til Bjergby en smal men mere direkte vej, hvor det også tager* $30 + 30x$ *minutter at tage denne rute, hvor x er antallet af biler der tager denne vej. Nørre og Sønder Mellemby er imidlertid i praksis én by, og der er en ganske kort forbindelsesvej mellem de to byers vejnet. Tiden for at tage forbindelsesvejen vil vi sætte til 0. En Nash-ligevægt består i at alle pendlere tager fra Avnstrup til Sønder Mellemby, videre til Nørre Mellemby* *og derfra til Bjergby. Transportiden bliver da 2 timer.*

Det bemærkelsesværdige i dette eksempel er, at en spærring af forbindelsesvejen mellem Nørre og Sønder Mellemby ændrer Nash-ligevægten, så det optimale for alle bliver at halvdelen skal tage den nordlige rute og halvdelen den sydlige. Herved bliver den gennemsnitlige transporttid reduceret til 1 time og 45 min. Spærring *af vejen resulterer således i* kortere *transporttid for alle! I stedet for helt at spærre forbindelsesvejen kan med lave vejbump og tilsvarende trafikhindringer blot de gør at det kommer til at tage mindst 15 minutter at køre mellem Nørre og Sønder Mellemby.*

Eksempel 6 *Vi betragter et spil med to spillere, Alice og Bob, som hver har 4 strategier. Deres pay-off matricer er givet ved*

Pay-off for Alice	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1	4	8	4
a_2	3	2	6	3
a_3	3	4	9	-1
a_4	3	1	6	-2

og

Pay-off for Bob	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	19	16	20	15
a_2	5	8	8	8
a_3	1	2	1	2
a_4	6	3	1	-2

.

Ved skiftevis at fjerne dominerede strategier fra Alice og Bob ender vi med, at Alice skal vælge strategi a_3 og at Bob skal vælge strategi b_2. Kombinationen (a_3, b_2) er en Nash-ligevægt, idet det ikke kan betale sig for nogen af spillerne at ændre deres strategi. Der findes kun denne ene Nash-ligevægt, så hvis både Alice og Bob er fuldstændigt rationelle, vil de vælge denne kombination af strategier.

Eksempel 7 *Vi betragter et spil med to spillere, Alice og Bob, som hver har 4 strategier. Deres pay-off matricer er givet ved*

Pay-off for Alice	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	-2	6	3
a_2	11	-2	5	2
a_3	10	-3	5	2
a_4	11	-3	5	1

og

Pay-off for Bob	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	-1	5	4	1
a_2	15	7	6	16
a_3	0	3	6	1
a_4	8	8	3	6

.

Ved skiftevis at fjerne dominerede strategier fra Alice og Bob ender man med strategierne a_1 og b_2. Det er igen let at checke at strategiparret (a_1, b_2) er en Nash-ligevægt. Strategiparret (a_4, b_1) er imidlertid også en Nash-ligevægt og den er langt mere fordelagtig for både Alice og Bob. Grunden til at denne kombination forsvandt da vi fjernede dominerede strategier var, at a_4 er domineret af a_2 men at den ikke var strengt domineret. Nashligevægten (a_1, b_2) er en slags lokalt maksimum, hvor ingen af spillerne føler noget incitament til selv at ændre sin strategi. Alice og Bob skal ændre strategier samtidigt for at det nytter noget. Dette kræver en form for forpligtende samarbejde.

I nogle spil kan det betale sig at samarbejde, og da er det en fordel at fortælle de øvrige spillere hvad ens egen strategi er. I andre spil modarbejder man hinanden og da kan det være bedst at hemmeligholde sin strategi.

Eksempel 8 (Sten, Saks, Papir) *Alice og Bob spiller Sten, Saks, Papir. Alice har følgende payoff-matrix, idet vi regner vundet for 1 og tabt for -1.*

Pay-off for Alice	*Sten*	*Saks*	*Papir*
Sten	*0*	*1*	*-1*
Saks	*-1*	*0*	*1*
Papir	*1*	*-1*	*0*

Bobs payoff-matrix fås ved at skifte fortegn.

Pay-off for Bob	*Sten*	*Saks*	*Papir*
Sten	*0*	*-1*	*1*
Saks	*1*	*0*	*-1*
Papir	*-1*	*1*	*0*

Vi ser at i dette tilfælde er der ingen strategier, som er dominerede. Både Alice og Bob vil prøve at hemmeligholde deres egen strategi indtil modspilleren har valgt sin. Spillet har ingen Nash-ligevægt.

Det vi har set på hidtil, er såkaldte *rene strategier*. Vi vil nu indføre såkaldte *blandede strategier*. I spillet Sten, Saks, Papir er der tre rene strategier og Alice bør ikke røbe sin stategi til Bob. Dette kan opnås ved at Alice *blander* de tre rene strategier i forholdet $(1/3, 1/3, 1/3)$, hvor $1/3$ skal opfattes som en sandsynlighed. Alice kaster derfor en terning og hvis der kommer 1 eller 2 øjne vælger hun sten, hvis der kommer 3 eller 4 øjne vælger hun saks, og hvis der kommer 5 eller 6 vælger hun papir. Denne blandede strategi kan Alice nu fortælle Bob. Da vil Bobs middelgevist være 0 uanset hvad han gør. Tilsvarende kan Bob bruge den blandede strategi $(1/3, 1/3, 1/3)$. Herved bliver kombinationen af de to blandede strategier en Nash-ligevægt.

Sætning 9 *I et spil med endeligt mange spillere, som hver har endelig mange rene strategier, findes altid (mindst) en Nash-ligevægt af blandede strategier.*

Beviset for denne sætning er vanskeligt og vi udelader det derfor. Sætningen blev bevist af John Nash i 1950 og han modtog senere Nobelprisen i økonomi for resultatet.

Figur 2: John von Neumann (1903-1957) beviste minimax-sætningen i 1928 og regnes sammen med O. Morgenstern som grundlægger af spilteorien in 1933. Han var iøvrigt også en af computerens fædre og må anses for en af de vigtigste videnskabsmænd i det 20. århundrede.

3 To-personers nulsum-spil

I dette afsnit skal vi se på en særlig type af spil, som dels er lette at analysere og dels har mange vigtige anvendelser. Spillene er karakteriseret ved at der kun deltager to spillere, som vi vælger at kalde Alice og Bob. Endvidere vil vi antage, at hvad, der er godt for Alice, er tilsvarende skidt for Bob. Der gælder med andre ord at

$$f_{Alice}(s_1, s_2) = -f_{Bob}(s_1, s_2).$$

I denne type spil vil de to spillere aldrig have noget incitament for at samarbejde. I stedet for at maksimere f_{Bob} kan vi sige at Bob ønsker at minimere f_{Alice}. Vi kan med andre ord nøjes med at interessere of for Alices kriteriefunktion, som vi blot vil betegne f. Strategier for Alice vil vi betegne $a_1, a_2, \ldots$ og Bobs strategier vil vi betegne $b_1, b_2, \ldots$.

Sætning 10 *I et to-personers nulsumsspil vil alle Nash-ligevægte have samme værdi.*

Bevis. Lad (a_1, b_1) og (a_2, b_2) betegne to Nash-ligevægte. Da gælder at

$$f(a_1, b_1) \geq f(a_2, b_1),$$

idet strategi a_1 er optimal for Alice hvis Bob spiller strategi b_1. Vi har også at

$$f(a_2, b_1) \geq f(a_2, b_2),$$

idet b_2 er optimal for Bob hvis Alice spiller a_2, idet Bob ønsker at minimere f. Vi har således vist at

$$f(a_1, b_1) \geq f(a_2, b_2).$$

Den modsatte ulighed vises tilsvarende og vi har derfor at

$$f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2).$$

■

Sætning 10 kunne give det indtryk, at alle Nash-ligvægte er lige gode. Det er også rigtigt, hvis begge spillere spiller fuldstændigt rationelt. I følgende spil er både (a_1, b_1) og (a_2, b_1) Nashligevægte og begge har værdi 1.

Payoff for Alice	b_1	b_3
a_1	1	4
a_2	1	1

Vi ser imidlertid at a_1 dominerer a_2, så hvis Bob ikke er rationel har Alice chance for en gevinst på 4 frem for 1. Det er et eksempel på at maximin strategien garanterer os et vist payoff, men at den sagtens kan give os et højere payoff.

Sætning 11 *I et to-personers nulsumsspil gælder*

$$\max_a \min_b f(a, b) \leq \min_b \max_a f(a, b). \tag{1}$$

Proof. I et to-personers nulsumsspil gælder

$$f(a_0, b_0) = f(a_0, b_0)$$

og dermed

$$\min_b f(a_0, b) \leq f(a_0, b_0).$$

Vi tager nu maximum over Alices strategier og får

$$\max_a \min_b f(a, b) \leq \max_a f(a, b_0).$$

Dette gælder for alle Bobs strategier b_o så vi kan tage minimum over b_0 på højre side hvilket giver

$$\max_a \min_b f(a, b) \leq \min_b \max_a f(a, b).$$

■

Sætning 12 (Minimax-sætningen) *Et to-personers nulsums-spil har en Nash-ligevægt, netop hvis*

$$\max_a \min_b f(a, b) = \min_b \max_a f(a, b). \tag{2}$$

Specielt gælder (2), hvis begge personer tillades at bruge blandede strategier.

Bevis. Antag at $\max_a \min_b f(a,b) = \min_b \max_a f(a,b)$. Da findes a_0 og b_0 så

$$\min_b f(a_0,b) = \max_a f(a,b_0)$$

Derfor gælder

$$f(a_0,b_0) \geq \min_b f(a_0,b) = \max_a f(a,b_0) \geq f(a_0,b_0)$$

og dermed at $\min_b f(a_0,b) = \max_a f(a,b_0) = f(a_0,b_0)$. Det viser at (a_0,b_0) er en Nash-ligevægt.

Antag omvendt at (a_0,b_0) er en Nash-ligevægt. Da gælder

$$f(a,b_0) \leq f(a_0,b_0)$$

for alle a idet Alice ikke får noget ud af at ændre sin strategi. Derfor gælder

$$\max_a f(a,b_0) \leq f(a_0,b_0)$$

og dermed også

$$\min_b \max_a f(a,b) \leq f(a_0,b_0).$$

Tilsvarende vises, at

$$\max_a \min_b f(a,b) \geq f(a_0,b_0).$$

Tilsammen får vi, at

$$\min_b \max_a f(a,b) \leq f(a_0,b_0) \leq \max_a \min_b f(a,b),$$

hvilket viser at $\min_b \max_a f(a,b) = \max_a \min_b f(a,b)$.

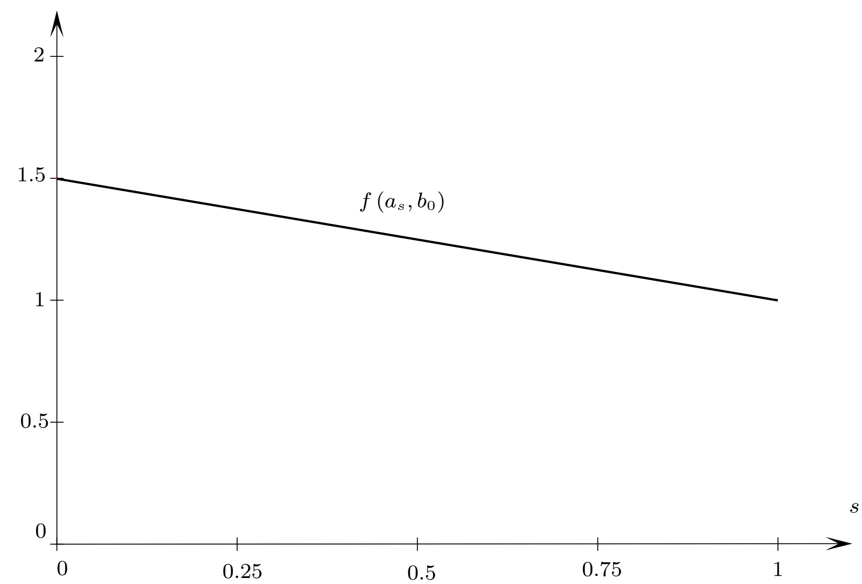
Hvis de spillere tillades at bruge blandede strategier, findes ifølge Sætning 9 en Nashligevægt og da er minimax lig maximin. ■

Hvis blandede strategier tillades, er minimax lig maximin og den fælles værdi kaldes *spillets værdi.* Med disse resultater er vi i stand til at lave en vigtig klassifikation af to-personers nul-sumsspil, hvor de to spillere tillades at bruge blandede strategier.

Spil med positiv værdi Disse er favorable for Alice. Hun har en blandet strategi, som giver positivt middelpayoff uanset hvad Bob gør.

Spil med negativ værdi Disse er favorable for Bob. Han har en blandet strategi, som giver Alice en negativ middelpayoff (og dermed sig selv en positiv middelpayoff) uanset hvad hun gør.

Spil med værdi nul Disse er hverken favorable for Alice eller Bob. Både Alice og Bob har en blandet strategi, som vil give dem begge en middelpayoff på nul uanset hvad den anden gør.



Med dette resultat i baghovedet kunne det jo være rart at kunne udregne et spils værdi samt de optimale strategier. Det foregår ved en form for lineær optimering. For at kunne illustrere metoden vil vi holde os til eksempler, hvor Alice har 2 rene strategier, efter at alle dominerede strategier er blevet fjernet. Vi vil i første omgang antage at Bob også kun har 2 strategier. I de følgende illustrationer tages der udgangspunkt i følgende payoff matrix for Alice

Pay-off for Alice	b_0	b_1
a_0	1,5	1
a_1	1	2

Alice og Bob tillades, at bruge blandede strategier. Vi tænkler os, at Alice blander strategierne a_0 og a_1 i forholdet $1 - s$ og s, hvor $s \in [0; 1]$. Denne blandede strategi vil vi betegne a_s. Bobs strategier kalder vi b_0 og b_1. Hvis Bob vælger strategien b_0 bliver middelværdien af kriteriefunktionen

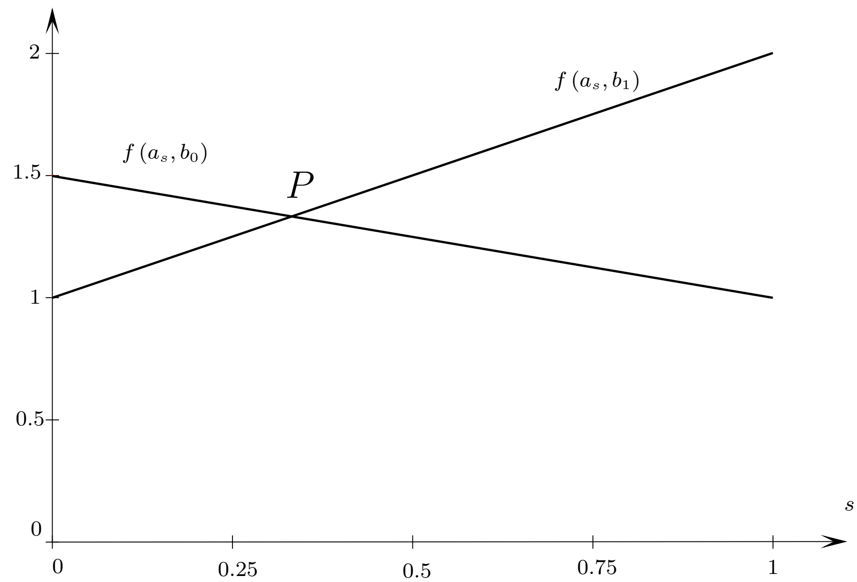
$$f(a_s, b_0) = (1 - s) f(a_0, b_0) + s f(a_1, b_0).$$

Vi bemærker, at dette er en lineær funktion af s. Vi tegner grafen for denne funktion.

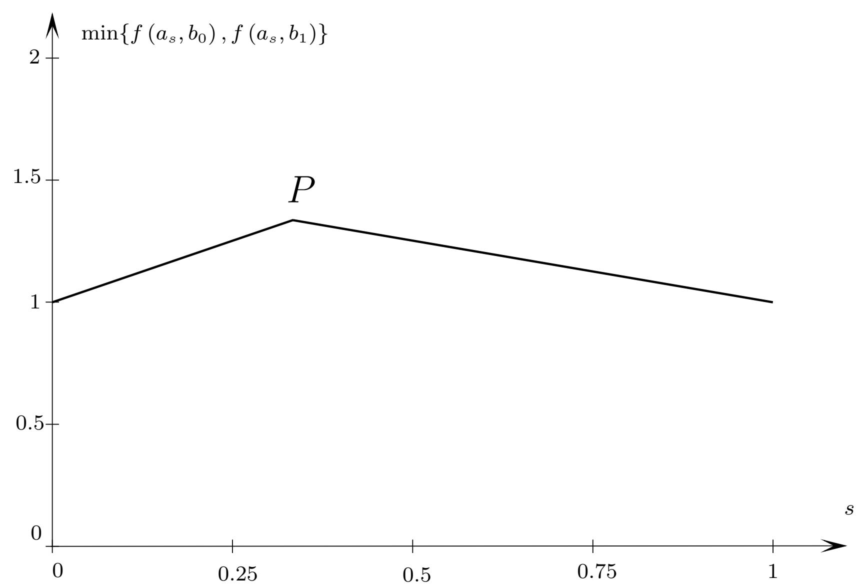
Hvis Bob vælger strategien b_1 is stedet får man en anden ret linje.

Hvis den ene linje lå over den anden ville det betyde at den ene af Bobs strategier ville dominere den anden. Det har vi antaget ikke er tilfældet. Derfor vil de to linjer skære hinanden. Bob ønsker at minimere kriteriefunktionen og vil derfor altid vælge den nederste kurve.

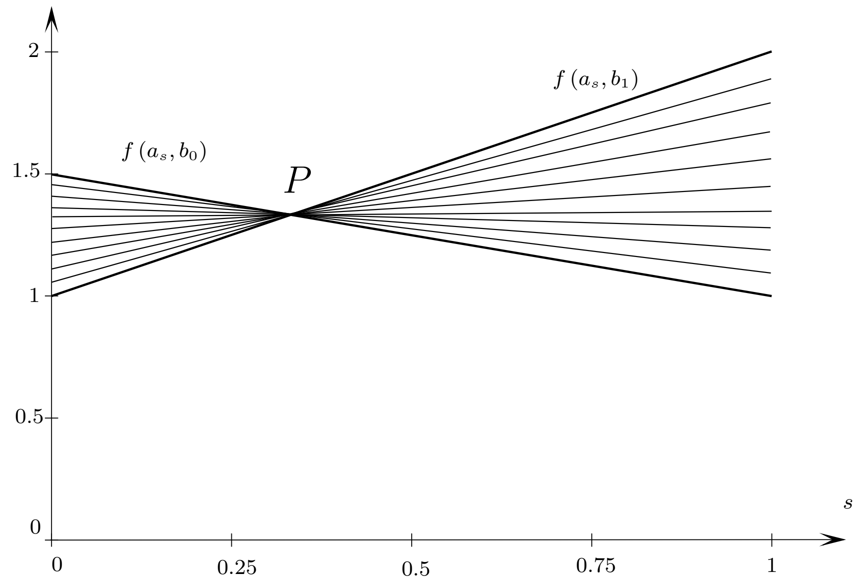
Det optimale blandingsforhold for Alice svarer derfor til skæringspunktet for de rette linjer, som vi vil kalde P. Lad os betegne det tilsvarende bland-



2
1.5
1
0.5
0
$f(a_s, b_1)$
$f(a_s, b_0)$
P
s
0
0.25
0.5
0.75
1



$\min\{f(a_s, b_0), f(a_s, b_1)\}$
2
1.5
1
0.5
0
P
s
0
0.25
0.5
0.75
1



ingsforhold s^*. På figuren bliver $s^* = 1/3$. Den blandede strategi med denne blandingsforhold betegner vi a_{s^*}. Da gælder, at

$$f(a_{s^*}, b_0) = f(a_{s^*}, b_1).$$

Hvis Alice laver den optimale blanding for at maksimere den minimale pay-off, så gælder der med andre ord at Bobs rene strategier giver samme middelpayoff. Hvis blot den ene spiller vælger den optimale strategi vil middelgevinsten være $f(a^*, b^*)$ uanset hvad den anden spiller foretager sig.

Antag at Bob blander sine strategier b_0 og b_1 i forholdet $(1-t)$ og t, og vi kalder denne blandede stregi for b_t. For et givet t kan vi afbilde middelværdien som funktion af s og få

$$f(a_s, b_t) = (1-s) f(a_0, b_t) + s f(a_1, b_t),$$

hvilket igen er en ret linje. Hvis vi indsætter $s = s^*$ får vi

$$\begin{aligned} f(a_{s^*}, b_t) &= (1-t) f(a_{s^*}, b_0) + t f(a_{s^*}, b_1) \\ &= (1-t) f(a_{s^*}, b_0) + t f(a_{s^*}, b_0) \\ &= f(a_{s^*}, b_0). \end{aligned}$$

Det betyder at uanset valget af t vil den rette linje $(1-s) f(a_0, b_t) + s f(a_1, b_t)$ gå gennem punktet P.

Hvis Alice ved at Bob vælger den blandede strategi b_t, så vil Alice vælge den rene strategi, som svarer til det højeste endepunkt. Bob ønsker, at det højeste endepunkt ligger så lavt som muligt og vælger derfor t så den rette linje er vandret. Denne strategi for Bob vil vi kalde t^*. Hvis Bob vælger denne strategi, vil middelpayoff for Alice ikke afhænge af hendes valg af strategi. Vi ser, at (a_{s^*}, b_{t^*}) er en Nash-ligevægt. Hvis blot den ene spiller vælger den optimale strategi, vil middelgevinsten være $f(a_{s^*}, b_{t^*})$ uanset hvad den anden spiller foretager sig.

4 Handel med sandsynligheder

Hvis vi i en beslutningssituation skal bruge Laplace-kriteriet, skal vi bruge en sandsynlighedsfordeling. Hvis det drejer sig om et emne, hvorom vi ingen særlig indsigt har, kan det være klogt at kontakte en ekspert og få ekspertens bud på en sandsynlighedsfordeling. Hvis vi f.eks. ønsker at vide noget om sandsynligheden for regn i morgen, kan vi kontakte en meteorolog, som så kan give sit bud på hvilket tal vi skal bruge som sandsynligheden for regn i morgen. Hvis man i stedet forestiller sig, at en general ønsker sig viden om nabolandets forsvar, vil han kontakte sin efterretningstjeneste. Man kunne også forestille sig en person, som ønsker at foretage en aktiehandel og derfor gerne vil høre en ekspertvurdering af sandsynligheden for at en bestemt aktie går op eller ned. Men kan vi stole på ekspertens udtalelser? Har eksperten sin egen dagsorden, som han kan forfølge ved at fejlinformere os? Det ønsker vi naturligvis at undgå, så vi vil betale eksperten svarende til kvaliteten af ekspertens forudsigelser. Spørgsmålet er blot hvordan vi skal gøre. Vi vil først præcisere problemet.

Vi betaler en spåmand for at give os en sandsynlighedfordeling for at en størrelse X antager en af værdierne $x_1, x_2, ...$ Spåmanden bliver belønnet som følger. Vi venter med at belønne spåmanden indtil vi har set hvilken værdi X får. Hvis X antager værdien x_i og spåmanden har sagt, at $X = x_i$ indtræffer med sandsynlighed q_i, så vil spåmanden modtage beløbet $f(q_i)$, hvor f er en passende valgt differentialbel funktion med definitionsmængde $[0; 1]$. Ideen er at vælge f som en voksende funktion, så hvis spåmanden har forudsagt det som rent faktisk indtræffer med stor sandsynlighed, så tjener han meget og hvis der sker noget som spåmanden sagde havde lav sandsynlighed, så skal han ikke have meget i løn.

Definition 13 *Funktionen f siges at give en* ægte score-regel *dersom den motiverer spåmanden til altid at være ærlig.*

Denne definition kræver lidt forklaring. Hvis spåmanden selv udregner sandsynligheder med sandsynlighedsfordelingen $p_1, p_2, ...$ og vælger at give os sandsynlighedsfordelingen $q_1, q_2, ...$ så vil middelværdien af spåmandens score være

$$p_1 f(q_1) + p_2 f(q_2) + \cdots + p_n f(q_n).$$

Funktionen f er derfor en ægte scorefunktion, hvis middelscore er maksimal når $q_i = p_i$.

Sætning 14 *Funktionen $f(x) = \ln x$ giver en ægte score-funktion.*

Proof. Vi skal vise at

$$p_1 \ln (p_1) + p_2 \ln (p_2) + \cdots + p_n \ln (p_n) \geq p_1 \ln (q_1) + p_2 \ln (q_2) + \cdots + p_n \ln (q_n) .$$

Dette er det samme som at vise at

$$\begin{aligned}
&(p_1 \ln (q_1) + p_2 \ln (q_2) + \cdots + p_n \ln (q_n)) \\
&- (p_1 \ln (p_1) + p_2 \ln (p_2) + \cdots + p_n \ln (p_n)) \\
&= p_1 \ln \frac{q_1}{p_1} + p_2 \ln \frac{q_2}{p_2} + \cdots + p_n \ln \frac{q_n}{p_n}
\end{aligned}$$

er negativ. Det approksimerende førstegradspolynomium for den naturlige logaritmefunktion omkring 1 er $\ln x \approx x - 1$. Da den naturlige logaritmefunktion er konkav ligger grafen under sin tangent og der gælder derfor $\ln x \leq x - 1$ og lighedstegn gælder kun for $x = 0$. Det viser at

$$\begin{aligned}
&p_1 \ln \frac{q_1}{p_1} + p_2 \ln \frac{q_2}{p_2} + \cdots + p_n \ln \frac{q_n}{p_n} \\
&\qquad \leq p_1 \left(\frac{q_1}{p_1} - 1 \right) + p_2 \left(\frac{q_2}{p_2} - 1 \right) + \cdots + p_n \left(\frac{q_n}{p_n} - 1 \right) \\
&\qquad = (q_1 + q_2 + \cdots + q_n) - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \\
&\qquad = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

■

Sætning 15 *Hvis f er en differentiabel funktion med definitionsmængde $]0;1]$, giver en ægte score-regel, så findes konstanter $a \in]0;\infty[$ og $k \in \mathbb{R}$, så*

$$f(x) = a \ln x + k.$$

Proof. For enhver sandsynlighedsfordeling $p_1, p_2, \ldots$ er middelgevinssten for spåmanden

$$p_1 f(p_1) + p_2 f(p_2) + \cdots + p_n f(p_n)$$

hvis han giver os sandsynlighedsfordelingen $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ og

$$p_1 f(p_1 + x) + p_2 f(p_2 - x) + \cdots + p_n f(p_n)$$

hvis spåmanden i stedet giver os sandsynlighedsfordelingen $(p_1 + x, p_2 - x, \ldots, p_n)$. Da det bedst skal kunne betale sig for spåmanden at give os den sandsynlighedsfordeling han selv bruger til at udregne sin middelpayoff, gælder der

$$p_1 f(p_1) + p_2 f(p_2) + \cdots + p_n f(p_n) \geq p_1 f(p_1 + x) + p_2 f(p_2 - x) + \cdots + p_n f(p_n)$$

og dermed

$$p_1 f(p_1) + p_2 f(p_2) \geq p_1 f(p_1 + x) + p_2 f(p_2 - x) .$$

Vi indfører funktionen

$$g(x) = p_1 f(p_1 + x) + p_2 f(p_2 - x)$$

og ser at g har maksimum for $x = 0$. Den afledte at g beregnes som

$$g'(x) = p_1 f'(p_1 + x) - p_2 f'(p_2 - x).$$

Da $g'(0) = 0$ har vi

$$p_1 f'(p_1 + 0) - p_2 f'(p_2 - 0) = 0$$

og dermed

$$p_1 f'(p_1) = p_2 f'(p_2).$$

Dette gælder for alle p_1 og p_2 i $]0;1]$ så der findes en konstant a så

$$p f'(p) = a.$$

Derfor gælder

$$f'(p) = \frac{a}{p}.$$

Derfor er f en stamfunktion til funktionen a/p og dermed må der gælde $f(p) = a \ln p + k$ for en konstant k. ■