Supplerende om polynomier

Peter Harremoës

September 2016

1 Beregning af funktionsværdier

Kineserne udviklede „det himmelske elements metode", som blandt andet kan bruges som en effektiv metode til beregning af funktionsværdier. Metoden blev fint beskrevet af Qin Jiushao (ca. 1202-1261), men har været kendt tidligere. Metoden blev siden genopdaget flere gange - sidst af William George Horner (1786-1837), som populariserede den måde at skrive beregningerne op på, som går under navnet Horners skema. Her vil vi forstå metoden ud fra et eksempel.

Eksempel 1. Lad $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6$. Vi ønsker at beregne $f(2)$ så vi skal sætte $x = 2$ ind i beregningsudtrykket, men først laver vi følgende omskrivning.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(3x^2 - 7x + 7\right)x - 6 \\ &= ((3x-7)x+7)x - 6. \end{aligned}$$

Det giver

$$\begin{aligned} f(2) &= ((3 \cdot 2 - 7) \cdot 2 + 7) \cdot 2 - 6 \\ &= ((6-7) \cdot 2 + 7) \cdot 2 - 6 \\ &= ((-1) \cdot 2 + 7) \cdot 2 - 6 \\ &= (-2+7) \cdot 2 - 6 \\ &= 5 \cdot 2 - 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Disse beregninger kan bekvemt skrives op i følgende skema.

2 $^p/_q$-metoden

Denne metode kan benyttes til at bestemme de af et polynomiums rødder som er rationelle.

Sætning 1. *Antag at* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, *hvor koefficienterne* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ *og* a_0 *alle er hele tal. Hvis det rationelle tal* $x = {}^p/_q$ *er rod i* $f(x)$ *og brøken* ${}^p/_q$ *er uforkortelig, så går* p *op i* a_0 *og* q *går op i* a_n.

Bevis. Antag at $x = {}^p/_q$ er rod i $f(x)$. Da gælder at

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 &= 0 \\ a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

	3	-7	7	-6
	0	6	-2	10
$x = 2$	3	-1	5	4

Tabel 1: Eksempel på Horners skema.

Denne ligning ganges igennem med q^n, hvilket giver

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Da q går op i alle de første led, må q også gå op i det første led $a_n p^n$. Da brøken p/q er uforkortelig, har p og q ingen fælles faktorer. Derfor må q gå op i a_n. At p går op i a_0 vises på samme måde. □

Eksempel 2. Vi ønsker at finde eventuelle rationelle løsninger til ligningen $x^3 - 5x^2 + 5x + 2 = 0$. Hvis $x = p/q$ er en uforkortelig brøk, som er løsning til ligningen, så går tælleren p op i 2, hvilket betyder at $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Tilsvarende går nævneren q op i 1, som er koefficienten til x^3, så $q \in \{-1, 1\}$. Det giver følgende mulige rationelle løsninger til ligningen $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Vi udregner funktionsværdierne for disse værdier af x, hvilket giver

$$\begin{aligned} f(-2) &= -36 \\ f(-1) &= -9 \\ f(1) &= 3 \\ f(2) &= 0. \end{aligned}$$

Som det ses er $x = 2$ den eneste rationelle rod i polynomiet.

Eksempel 3. Vi ønsker at bestemme eventuelle rationelle løsninger til ligningen $x^2 = 2$. Ligningen omskrives til $x^2 - 2 = 0$, så hvis $x = p/q$ er uforkortelig så skal p gå op i -2 og q skal gå op i 1. De mulige rationelle løsninger er derfor -2,-1,1 og 2. Ingen af disse tal er dog løsninger, så ligningen har ingen rationelle løsninger. Normalt vil vi sige at ligningen $x^2 = 2$ har løsningerne $x = \pm 2^{1/2}$, så vi har fået vist at $2^{1/2}$ ikke kan skrives som en brøk. Derfor siger vi, at $2^{1/2}$ er et irrationelt tal.

3 Polynomiers division

Paolo Ruffini (1765-1822) opdagede, at det himmelske elements metode (som han genopfandt) kan bruges til effektivt at lave *polynomiers division*. Vi vil igen tage udgangspunkt i et eksempel.

Eksempel 4. I Tabel 1 så vi at det sidste 4-tal var polynomiets værdi for $x = 2$. Nu vil vi give en forklaring på de øvrige tal i nederste linje. Først danner vi et polynomium $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Vi påstår at det oprindelige polynomium $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x-2)\, g(x) + 4$. Da vi konstruerede Horners skema, udregnede vi den nederste række ved at lægge de to øverste rækker sammen. Derfor kan vi udregne den øverste række ved at trække den midterste række fra den nederste. Den nederste række er $x \cdot g(x) + 4$ og den midterste række er $2 \cdot g(x)$. Derfor er

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \cdot g(x) + 4) - 2 \cdot g(x) \\ &= (x \cdot g(x) - 2 \cdot g(x)) + 4 \\ &= (x-2) \cdot g(x) + 4. \end{aligned}$$

I ligningen $f(x) = (x-2)\, g(x) + 4$ kan vi dividere igennem med $x - 2$ og får

$$\frac{f(x)}{x-2} = g(x) + \frac{4}{x-2}.$$

Generelt gælder at hvis $f(x)$ er et polynomium og R er et reelt tal, så findes et polynomium $g(x)$ og et tal r så

$$f(x) = (x - r) \cdot g(x) + R.$$

Polynomiet $g(x)$ kaldes kvotienten og tallet R kaldes resten ved division af $f(x)$ med $x - r$. Læg mærke til, at kvotienten $g(x)$ er et polynomium af en grad 1 lavere end $f(x)$. Hvis resten er nul siger vi at divisionen $P(x)$ med $x - r$ går op. Med denne terminologi kan vi formulere følgende vigtige sætning.

Sætning 2. *Lad $f(x)$ være et polynomium og lad r være et reelt tal. Divisionen af $f(x)$ med $x - r$ går op, netop hvis r er rod i polynomiet.*

Bevis. Først benytter vi Horners skema til at lave omskrivningen

$$f(x) = (x - r) \cdot g(x) + R.$$

Ved at indsætte $x = r$ får vi at $f(r) = (r - r)\, g(r) + R$. Specielt ser vi at $f(r) = 0$, netop hvis resten R er lig nul. □

	3	-1	5
	0	6	10
$x=2$	3	5	15

Tabel 2: Horners skema bruges til at lave polynomiers division en gang mere.

Det vil sige, at r er rod i polynomiet netop hvis polynomiet har en faktorisering af formen

$$f(x) = (x-r) \cdot g(x).$$

At finde rødder i et polynomium og at faktorisere et polynomium er dermed to sider af samme sag.

Sætning 3. *Et n'te-gradsligning har højst n løsninger.*

Bevis. Hvis $f(x)$ er et n'te-gradspolynomium og r er en rod så kan $f(x)$ skrives på formen $f(x) = (x-r) \cdot g(x)$ og ligningen $f(x) = 0$ kan skrives som

$$\begin{aligned} (x-r) \cdot g(x) &= 0 \\ x-r=0 \quad &\vee \quad g(x)=0 \\ x=r \quad &\vee \quad g(x)=0. \end{aligned}$$

Derfor vil enhver rod i $f(x)$ være lig med r eller være rod i $(n-1)$'te-gradspolynomiet $g(x)$. Derfor graden af ligningen formindskes hver gang vi finder en rod. Hvis vi har fundet n rødder vil graden af polynomiet være bragt ned på nul og det vil ikke være muligt at finde yderligere rødder. ☐

4 Tangentbestemmelse med Horner

En tangent er en lineær funktion, som giver en god tilnærmelse af polynomiet nær et givet punkt. Hvis polynomiet hedder $f(x)$ og den lineære funktion hedder $h(x)$ så kan vi beskrive at tilnærmelsen $f(x) \approx h(x)$ for $x \approx r$ ved at $f(x) - h(x)$ har dobbeltrod for $x = r$. Ligesom Horners skema kan hjælpe os med at udregne funktionsværdier, så kan man også bruge Horners skema til at udregne ligninger for tangenter.

Eksempel 5. Vi er tidligere set at hvis $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6$ så kan $f(x)$ omskrives til

$$f(x) = (x-2)\left(3x^2 - x + 5\right) + 4.$$

Vi laver nu polynomiers division en gang til, idet vi udregner $g(x)$ divideret med $x-2$. Beregningen sker ved hjælp af Horners skema.

Det giver

$$g(x) = (x-2)(3x+5) + 15.$$

Herved får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)((x-2)(3x+5)+15)+4 \\ &= (3x+5)(x-2)^2 + 15(x-2) + 4 \\ &= (3x+5)(x-2)^2 + 15x - 26. \end{aligned}$$

Vi har dermed fået omskrevet polynomiet som en sum af en lineær funktion og et polynomium, som har dobbeltrod for $x = 2$. Tangenten har dermed ligning $y = 15x - 26$.