Horners skema

Peter Harremoës

15. marts 2019

1 Beregning af funktionsværdier

Kineserne udviklede „det himmelske elements metode“, som blandt andet kan bruges som en effektiv metode til beregning af funktionsværdier. Metoden blev fint beskrevet af Qin Jiushao (ca. 1202-1261), men har været kendt tidligere. Metoden blev siden genopdaget flere gange - sidst af William George Horner (1786-1837), som populariserede en måde at skrive beregningerne op på, som siden har gået under navnet *Horners skema*. For at forstå metoden vil vi tage udgangspunkt i et eksempel.

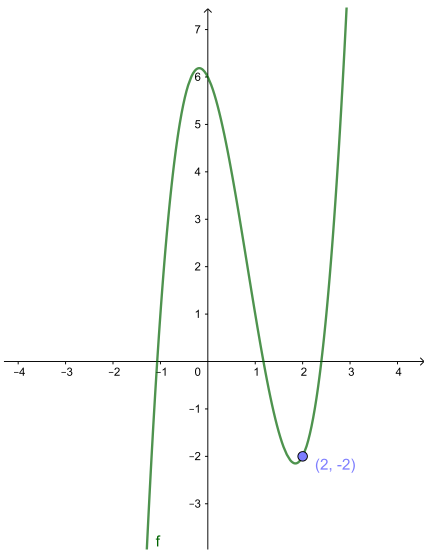
Lad $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 6$. Vi ønsker at beregne $f(2)$ så vi skal sætte $x = 2$ ind i beregningsudtrykket, men først laver vi følgende omskrivning.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 5x^2 - 2x + 6 \\ &= \left(2x^2 - 5x - 2\right) x + 6 \\ &= ((2x - 5)x - 2)x + 6 \,. \end{aligned}$$

Det giver

$$\begin{aligned} f(2) &= ((2 \cdot 2 - 5) \cdot 2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= ((4 - 5) \cdot 2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= ((-1) \cdot 2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= (-2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= (-4) \cdot 2 + 6 \\ &= -8 + 6 \\ &= -2 \,. \end{aligned}$$

I disse beregninger har vi skiftevis ganget og lagt til/trukket fra.



Disse beregninger kan bekvemt skrives op i det, som kaldes *Horners skema*. Først skriver vi koefficienterne til polynomiet f i første række og skriver 0 under den første koefficient.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & & & \\ \hline x=2 & & & & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Vi lægger 2 og 0 sammen og skriver summen i nederste række.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & & & \\ \hline x=2 & 2 & & & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Herefter ganger vi 2-tallet i nederste række med 2 og skriver produktet i 2. række.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & 4 & & \\ \hline x=2 & 2 & & & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Vi lægger -5 og 4 sammen og skriver summen i nederste række.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & 4 & & \\ \hline x=2 & 2 & \text{-}1 & & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Nu ganges -1 med 2 og produktet skrives i 2. række.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & 4 & \text{-}2 & \\ \hline x=2 & 2 & \text{-}1 & & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Summen af -2 og -2 er -4, som skrives i nederste række.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & 4 & \text{-}2 & \\ \hline x=2 & 2 & \text{-}1 & \text{-}4 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Så ganges -4 med 2 og produktet skrives i 2. række.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & 4 & \text{-}2 & \text{-}8 \\ \hline x=2 & 2 & \text{-}1 & \text{-}4 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Endelig lægges 6 og -8 sammen, hvilket giver -2, som skrives i den nederste række. Herved er funktionsværdien $f(2)$ beregnet, og resultatet står adskilt fra de øvrige tal i nederste række.

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & \text{-}5 & \text{-}2 & 6 \\ & 0 & 4 & \text{-}2 & \text{-}8 \\ \hline x=2 & 2 & \text{-}1 & \text{-}4 & \multicolumn{1}{|c}{\text{-}2} \\ \cline{5-5} \end{array}$$

Vi tager et eksempel mere.

Eksempel 1. Lad $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6$. Vi ønsker at beregne $f(2)$ så vi skal sætte $x = 2$ ind i beregningsudtrykket, men først laver vi følgende omskrivning.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6 \\ &= \left(3x^2 - 7x + 7\right)x - 6 \\ &= ((3x-7)x+7)x - 6. \end{aligned}$$

Det giver

$$\begin{aligned} f(2) &= ((3\cdot 2 - 7)\cdot 2 + 7)\cdot 2 - 6 \\ &= ((6-7)\cdot 2 + 7)\cdot 2 - 6 \\ &= ((-1)\cdot 2 + 7)\cdot 2 - 6 \\ &= (-2+7)\cdot 2 - 6 \\ &= 5\cdot 2 - 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Ved hjælp af Horners skema kan disse beregninger skrives op som følger.

	3	-7	7	-6
	0	6	-2	10
$x = 2$	3	-1	5	$\boxed{4}$

Øvelse 1. Brug Horners skema til at lave et sildeben for funktionen $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

Brug sildebenet til at lave en skitse af grafen for f.

2 $^p/_q$-metoden

Denne metode kan benyttes til at bestemme de af et polynomiums rødder, som er rationelle tal.

Sætning 1. *Antag, at* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$*, hvor koefficienterne* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ *og* a_0 *alle er hele tal. Hvis det rationelle tal* $x = {}^p/_q$ *er rod i* $f(x)$*, og brøken* ${}^p/_q$ *er uforkortelig, så går* p *op i* a_0 *og* q *går op i* a_n*.*

Bevis. Antag at $x = {}^p/_q$ er rod i $f(x)$. Da gælder, at

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 &= 0 \\
a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Denne ligning ganges igennem med q^n, hvilket giver

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Da q går op i alle de sidste led, må q også gå op i det første led $a_n p^n$. Da brøken ${}^p/_q$ er uforkortelig, har p og q ingen fælles faktorer. Derfor må q gå op i a_n. At p går op i a_0 vises på samme måde. □

Eksempel 2. Vi ønsker at finde eventuelle rationelle løsninger til ligningen $x^3 - 5x^2 + 5x + 2 = 0$. Hvis $x = {}^p/_q$ er en uforkortelig brøk, som er løsning til ligningen, så går tælleren p op i 2, hvilket betyder at $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Tilsvarende går nævneren q op i 1, som er koefficienten til x^3, så $q \in \{-1, 1\}$. Det giver følgende mulige rationelle løsninger til ligningen $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Vi udregner funktionsværdierne for disse værdier af x, hvilket giver

$$\begin{aligned}
f(-2) &= -36 \\
f(-1) &= -9 \\
f(1) &= 3 \\
f(2) &= 0.
\end{aligned}$$

Som det ses, er $x = 2$ den eneste rationelle rod i polynomiet.

Eksempel 3. Vi ønsker at bestemme eventuelle rationelle løsninger til ligningen $x^2 = 2$. Ligningen omskrives til $x^2 - 2 = 0$, så hvis $x = {}^p/_q$ er uforkortelig så skal p gå op i -2 og q skal gå op i 1. De mulige rationelle løsninger er derfor -2,-1,1 og 2. Ingen af disse tal er dog løsninger, så ligningen har ingen rationelle løsninger. Normalt vil vi sige at ligningen $x^2 = 2$ har løsningerne $x = \pm 2^{1/2}$, så vi har fået vist, at $2^{1/2}$ ikke kan skrives som en brøk. Derfor siger vi, at $2^{1/2}$ er et irrationelt tal.

3 Polynomiers division

Paolo Ruffini (1765-1822) opdagede, at det himmelske elements metode (som også han genopfandt) kan bruges til effektivt at lave *polynomiers division.* Vi vil igen tage udgangspunkt i et eksempel.

Eksempel 4. I Eksempel 1 så vi, at det sidste 4-tal i udregningen var polynomiets værdi for $x = 2$. Nu vil vi give en forklaring på de øvrige tal i nederste linje. Først danner vi et polynomium $q(x) = 3x^2 - x + 5$. Vi påstår at det oprindelige polynomium $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x-2) \cdot q(x) + 4$. Da vi konstruerede Horners skema, udregnede vi den nederste række ved at lægge de to øverste rækker sammen. Derfor kan vi udregne den øverste række ved at trække den midterste række fra den nederste. Den nederste række er $x \cdot q(x) + 4$ og den midterste række er $2 \cdot q(x)$. Derfor er

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \cdot q(x) + 4) - 2 \cdot g(x) \\ &= (x \cdot q(x) - 2 \cdot g(x)) + 4 \\ &= (x-2) \cdot q(x) + 4. \end{aligned}$$

I ligningen $f(x) = (x-2)\,q(x) + 4$ kan vi dividere igennem med $x - 2$ og får

$$\frac{f(x)}{x-2} = q(x) + \frac{4}{x-2}.$$

Generelt gælder, at hvis $f(x)$ er et polynomium og r er et reelt tal, så findes et polynomium $q(x)$ og et tal R, så

$$f(x) = q(x) \cdot (x-r) + R.$$

Polynomiet $q(x)$ kaldes *kvotienten* og tallet R kaldes *resten* ved division af $f(x)$ med $x - r$. Læg mærke til, at kvotienten $q(x)$ er et polynomium, hvis grad er 1 lavere end graden af $f(x)$.

Hvis resten er nul, siger vi at divisionen af$P(x)$ med $x - r$ *går op*. Med denne terminologi kan vi formulere følgende vigtige sætning.

Sætning 2. *Lad $f(x)$ være et polynomium og lad r være et reelt tal. Divisionen af $f(x)$ med $x - r$ går op, netop hvis r er rod i polynomiet.*

Bevis. Først benytter vi Horners skema til at lave omskrivningen

$$f(x) = q(x) \cdot (x-r) + R.$$

Ved at indsætte $x = r$ får vi, at $f(r) = (r-r)\,q(r) + R$. Specielt ser vi, at $f(r) = 0$, netop hvis resten R er lig nul. □

Det vil sige, at r er rod i polynomiet, netop hvis polynomiet har en faktorisering af formen

$$f(x) = q(x) \cdot (x-r).$$

At finde rødder i et polynomium og at faktorisere et polynomium er dermed to sider af samme sag.

Sætning 3. *Et n'te-gradsligning har højst n løsninger.*

Bevis. Hvis $f(x)$ er et n'te-gradspolynomium og r er en rod så kan $f(x)$ skrives på formen $f(x) = q(x) \cdot (x-r)$ så kan vi lave omskrivningerne

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ q(x) \cdot (x-r) &= 0 \\ q(x) = 0 &\vee x - r = 0 \\ q(x) = 0 &\vee x = r. \end{aligned}$$

Derfor vil enhver rod i $f(x)$ være lig med r eller være rod i $(n-1)$'te-gradspolynomiet $q(x)$. Derfor vil graden af ligningen formindskes hver gang vi finder en rod. Hvis vi har fundet n rødder, vil graden af polynomiet være bragt ned på nul, og det vil ikke være muligt at finde yderligere rødder. □

4 Tangentbestemmelse med Horner

En tangent er en lineær funktion, som giver en god tilnærmelse af et polynomium nær et givet punkt. Hvis polynomiet hedder $f(x)$ og den lineære funktion hedder $h(x)$, så kan vi beskrive at tilnærmelsen $f(x) \approx h(x)$ er god for $x \approx r$ ved at kræve at $f(x) - h(x)$ har dobbeltrod for $x = r$. Ligesom Horners skema kan hjælpe os med at udregne funktionsværdier, så kan man også bruge Horners skema til at udregne ligninger for tangenter.

Eksempel 5. Vi er tidligere set, at hvis $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 6$, så kan $f(x)$ omskrives til

$$f(x) = \left(2x^2 - x - 4\right)(x - 2) - 2.$$

Vi laver nu polynomiers division en gang til, idet vi dividerer $g(x) = 2x^2 - x - 4$ med $x - 2$. Beregningen sker igen ved hjælp af Horners skema.

$$\begin{array}{r|ccc} & 2 & -1 & -4 \\ & 0 & 4 & 6 \\ \hline x = 2 & 2 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

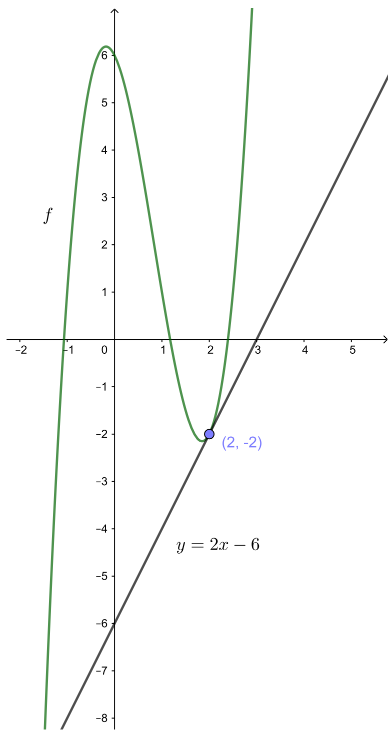
Det giver

$$g(x) = [2x + 3](x - 2) + 2.$$

For at holde de forskellige parenteser ude fra hinanden består det første parentespar af firkantede parenteser (klammar). Nu får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= [(2x + 3)(x - 2) + 2](x - 2) - 2 \\ &= (2x + 3)(x - 2)^2 + 2(x - 2) - 2 \\ &= (2x + 3)(x - 2)^2 + 2x - 6. \end{aligned}$$

Vi har dermed fået omskrevet polynomiet som en sum af en lineær funktion og et polynomium, som har dobbeltrod for $x = 2$. Tangenten har dermed ligning $y = 2x - 6$.



Eksempel 6. Vi er tidligere set, at hvis $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6$, og $x = 2$ så bliver Horners skema

$$\begin{array}{r|cccc} & 3 & -7 & 7 & -6 \\ & 0 & 6 & -2 & 10 \\ \hline x = 2 & 3 & -1 & 5 & \boxed{4} \end{array}$$

Så $f(x)$ kan omskrives omskrives til $f(x) = \left(3x^2 - x + 5\right)(x - 2) + 4$. Vi laver nu polynomiers division en gang til, idet vi dividerer $q(x) = 3x^2 - x + 5$ med $x - 2$. Beregningen sker igen ved hjælp af Horners skema, men for at effektivisere udvider vi det tidligere skema med et par rækker mere.

$$\begin{array}{r|cccc} & 3 & -7 & 7 & -6 \\ & 0 & 6 & -2 & 10 \\ \hline x = 2 & 3 & -1 & 5 & \boxed{4} \\ & 0 & 6 & 10 & \\ \hline & 3 & 5 & \boxed{15} & \end{array}$$

Det giver

$$q(x) = (3x+5)(x-2) + 15.$$

Herved får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= [(3x+5)(x-2)+15](x-2)+4 \\ &= (3x+5)(x-2)^2 + 15(x-2)+4 \\ &= (3x+5)(x-2)^2 + 15x - 26. \end{aligned}$$

Vi har dermed fået omskrevet polynomiet som en sum af en lineær funktion og et polynomium, som har dobbeltrod for $x = 2$. Tangenten har dermed ligning $y = 15x - 26$.

Øvelse 2. Bestem i hvert tilfælde tangenten for den pågeældende x-værdi. Når tangenten er bestemt plottes funktion og tangent i et koordinatsystem ved hjælp af GeoGebra eller et andet CAS-værktøj.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ for $x = 2$.

b) $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 5x + 2$ for $x = 1$.

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ for $x = -1$.

Øvelse 3. En parabel er givet ved $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$. Udregn punktet på grafen samt en ligning for tangenten for følgende værdier af x : -1,0,1,2,3,4,5. Tegn alle punkterne og tangenterne ind i samme koordinatsystem, og brug det til at skitsere parablens forløb.