MATA

Delprøve uden hjælpemidler, Maj 2009 — Peter Harremoës

Opg.1 Ifølge de givne oplysninger opfylder funktionen f at $f'(x) = 10$ og $f(10) = 112$. Funktionen er derfor givet ved

$$y = f(10) + f'(10)\cdot(x-10) = 112 + 10\cdot(x-10) = \underline{10x + 12}.$$

Opg.2 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix}t-3\\t\end{pmatrix}$.

a) Vektorerne er ortogonale dersom

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t-3\\t\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(t-3) - t = 0 \Leftrightarrow t-6=0 \Leftrightarrow \underline{t=6}.$$

b) Vektorerne er parallelle dersom

$$\hat{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t-3\\t\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow t-3+2t=0 \Leftrightarrow 3t-3=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Opg.3

$$F(x) = \int (e^x + 3x^2 - 7)\,dx = e^x + x^3 - 7x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Opg.4 Arealet af trekant ABC er $a\cdot b\cdot\sin(\angle C)$. Det oplyses at $b=4$, $\sin(\angle C) = \frac{1}{2}$ og at arealet er 6, hvilket giver ligningen

$$\tfrac{1}{2}a\cdot 4\cdot\tfrac{1}{2} = 6 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=6}}.$$

Opg.5 En funktion er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x.$$

Den afledte er

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8.$$

Vi løser ligningen $f'(x) = 0$ og finder rødderne

$$x = \frac{6 \pm (6^2 - 4\cdot 8)^{1/2}}{2} = \frac{6\pm 2}{2} = 3 \pm 1 = \begin{cases}4\\2.\end{cases}$$

Vi ser ved indsættelse at f' er positiv i $]-\infty;2[$, f' er negativ i $]2;4[$ og f' er positiv i $]4;\infty[$.

Derfor er f: voksende i $]-\infty;2]$,

aftagende i $[2;4]$,

voksende i $[4;\infty[$.

Delprøve med hjælpemidler, maj 2009 Peter Harremoës

Opg. 1 Punkterne A og B har koordinater (6,0) og (2,4).
De tilsvarende stedvektorer er $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
Vektor $\vec{c}$ er $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$.

a) Længden af $\vec{c}$ er $|\vec{c}|=(4^2+(-4)^2)^{1/2}=\underline{32^{1/2}=4\cdot 2^{1/2}=5,66}$

b) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{6}{6\cdot 20^{1/2}}\right)=\underline{\underline{77,08^\circ}}$

c) Arealet af den af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspændte parallelogram er

$$\frac{1}{2}|\hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}|0\cdot 2+6\cdot 4|=\underline{\underline{12}}.$$

Opg. 2 Over $m=36$ terminer indsættes $y=1000$ kr på en konto med rente $r=0,25\%$.

a) Efter de 36 terminer står der

$$y\cdot\frac{(1+r)^m-1}{r}=1000\cdot\frac{1,0025^{36}-1}{0,0025}=\underline{\underline{37.620,56}}.$$

b) Den effektive årlige rente er $(1+r)^{12}-1=(1,0025)^{12}-1=\underline{\underline{3,04\%}}$.

Der indsættes 50000 kr på kontoen så der ialt står $S=87.620,56$ kr. Disse penge hæves over $n=48$ terminer med fast udbetaling v.

c) For at beregne v som

$$v=\frac{A\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}=\frac{87.620,56\cdot 0,0025}{1-1,0025^{-48}}=\underline{\underline{1939,42}}$$

Opg. 3 Funktionen f er givet ved $f(x)=x^4-6x^2$.

a) Den første og anden afledte er

$$f'(x)=4x^3-12x$$
$$f''(x)=12x^2-12.$$

Vi løser ligningen $f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-12=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

(fortsættes)

Delopgave med hjælpemidler, maj 2009 Peter Harremoës

Opg. 3 a fortsat) Ved at indsætte $x=-2$, $x=0$ og $x=2$ ses at $f''(x)>0$ for $x\in\,]-\infty;-1[$, $f''(x)<0$ for $x\in\,]-1,1[$ og $f''(x)>0$ for $x\in\,]1;\infty[$. Derfor f konveks i intervallerne $]-\infty;-1]$ og $[1;\infty[$, og f er konkav i intervallet $[-1;1]$. Grafen for f har derfor vendetangenter svarende til $x=-1$ og $x=1$.

b) Ligningen for vendetangenten svarende til $x=-1$ er givet ved

$$y = f(-1)+f'(-1)(x-(-1)) = -5+8(x+1) = \underline{\underline{8x+3}}.$$

Ligningen for vendetangenten svarende til $x=1$ er givet ved

$$y = f(1)+f'(1)(x-1) = -5-8(x-1) = \underline{\underline{-8x+3}}.$$

Opg. 4 a) Ligevægtsprisen og den tilsvarende mængde aflæses på figuren som skæringspunktet mellem graferne for f og g. Vi ser at ligevægtsprisen er <u>200 kr</u> og ligevægtsmængden er <u>50 stk</u>. Dette resultat kontrolleres ved at checke at $f(50)=g(50)=200$.

b) Producentoverskuddet beregnes som

$$\int_0^{50} f(50)-f(x)\,dx = \int_0^{50} (200-(0{,}04\cdot x^2+100))\,dx = \int_0^{50}(100-0{,}04x^2)\,dx$$

$$= \left[100x-0{,}04\frac{x^3}{3}\right]_0^{50} = 100\cdot 50-0{,}04\frac{50^3}{3} = \underline{\underline{3333{,}33}}$$

c) Forbrugeroverskuddet beregnes som

$$\int_0^{50}(g(x)-g(50)) = \int_0^{50}(0{,}04\cdot x^2-8x+500-200)\,dx = \int_0^{50}(0{,}04x^2-8x+300)\,dx$$

$$= \left[0{,}04\frac{x^3}{3}-8\frac{x^2}{2}+300x\right]_0^{50} = 0{,}04\cdot\frac{50^3}{3}-4\cdot 50^2+300\cdot 50 = \underline{\underline{6666{,}67}}$$

Delopgave med hjælpemidler, maj 2009 Peter Harremoës

Opg 5 Se bilag.

Opg 6 Prisen for knee-skin som funktion af afsætningen er

$$p(x) = -50x + 1000 \,, \; x \in \,]0;20[\,.$$

Prisen for Body-skin som funktion af afsætningen er

$$q(x) = -200y + 4000 \,, \; y \in \,]0;20[\,.$$

a) Den samlede omsætning i firmaet er

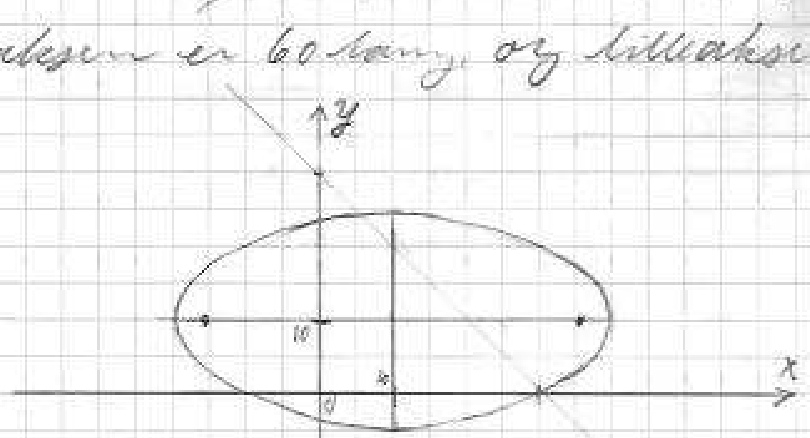
$$f(x,y) = x \cdot p(x) + y \cdot q(y) = x(-50x+1000) + y(-200y+4000)$$

$$= -50x^2 + 1000x - 200y^2 + 4000y \,.$$

b) Vi vil nu bestemme niveaukurven $f(x,y) = 20000$ ved at lave følgende omskrivninger

$$-50x^2 + 1000x - 200y^2 + 4000y = 20000$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 20x + 4y^2 - 80y = 400$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - 20x + 100 + 4y^2 - 80y + 400 = 400 + 100 + 400$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-10)^2 + (2y-20)^2 = 900$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-10)^2 + 4(y-10)^2 = 30^2$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{(x-10)^2}{30^2} + \frac{(y-10)^2}{15^2} = 1$$

Dette beskriver en ellipse hvis akser skærer hinanden i $(10,10)$. Storaksen er 60 lang, og lilleaksen er 30 lang.



Delopgave med hjælpemidler, maj 2009 Peter Harremoës

Opg. 6 c) Som ovenfor kan funktionen f omskrives til

$$f(x,y) = -50\left((x-10)^2 + 4(y-10)^2 - 500\right).$$

Funktionen har maksimum $-50 \cdot (-500) = 25.000$ for $(x,y) = (10,10)$, hvilket ligger inden for den øvre produktionsgrænse $x+y \leq 30$. Den maksimale omsætning er derfor 25.000 kr pr. uge.

Opg. 7 Funktionen f er aftagende for $x<0$, så $f'(x)$ er negativ for $x<0$. Dette passer ikke med Graf 1, så det må være Graf 2, som viser f'.

Opg. 8A Tallene for kursudvikling tastes ind som 2 lister på lommeregneren.

a) Ved hjælp af lommeregneren beregnes middelværdierne.
Middelværdien af Pulje 1 er kurs 158.
Middelværdien af Pulje 2 er kurs 146.

b) Standardafvigelserne beregnes vha. lommeregneren
Standardafvigelsen i Pulje 1 er 22,5.
Standardafvigelsen i Pulje 2 er 4,5.

Investering i Pulje 1 kræver betydelig større risikovillighed end investering i Pulje 2.

Opg 8B Et område i planen er bestemt ved betingelserne

$$\begin{cases} y \geq -3x+14 \\ y \geq -\frac{1}{2}x+9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Hjørnerne af området er givet som skæringspunkter mellem de tilsvarende linjer.

- $x=0$ og $y=-3x+14$ giver hjørnet $(0,14)$.
- $y=-3x+14$ og $y=-\frac{1}{2}x+9$ medfører $-3x+14=-\frac{1}{2}x+9$ og dermed $x=2$. Det giver hjørnet $(2,8)$.
- $y=0$ og $y=-3x+14$ giver hjørnet $(18,0)$.

De øvrige skæringspunkter mellem linjer ligger oplagt uden for området.

a) Minimum for funktionen f antages i et hjørne.

$f(0,14) = 25\cdot 0+25\cdot 14 = 350.$

(Se i øvrigt Bilag 3)

$f(2,8) = 25\cdot 2+25\cdot 8 = 250.$

$f(18,0) = 25\cdot 18+25\cdot 0 = 450.$

Minimum antages for $(x,y)=(2,8)$.

b) Minimum for kriteriefunktionen antages i punktet $(x,y)=(2,8)$ dersom niveaulinjerne har hældningskoefficient mellem hældningskoefficienterne for $y=-3x+14$ og $y=-\frac{1}{2}x+9$. Hvis kriteriefunktionen er $a\cdot x+25\cdot b$, så har niveaulinjerne hældning $-\frac{a}{25}$. Vi løser uligheden $-3\leq -\frac{a}{25}\leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 75\geq a\geq \frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$. Minimum antages derfor i $(2,8)$ dersom $a\in[12\frac{1}{2};75]$.

Bilag 1 til opgave 5 (med hjælpemidler) **– skal afleveres.**

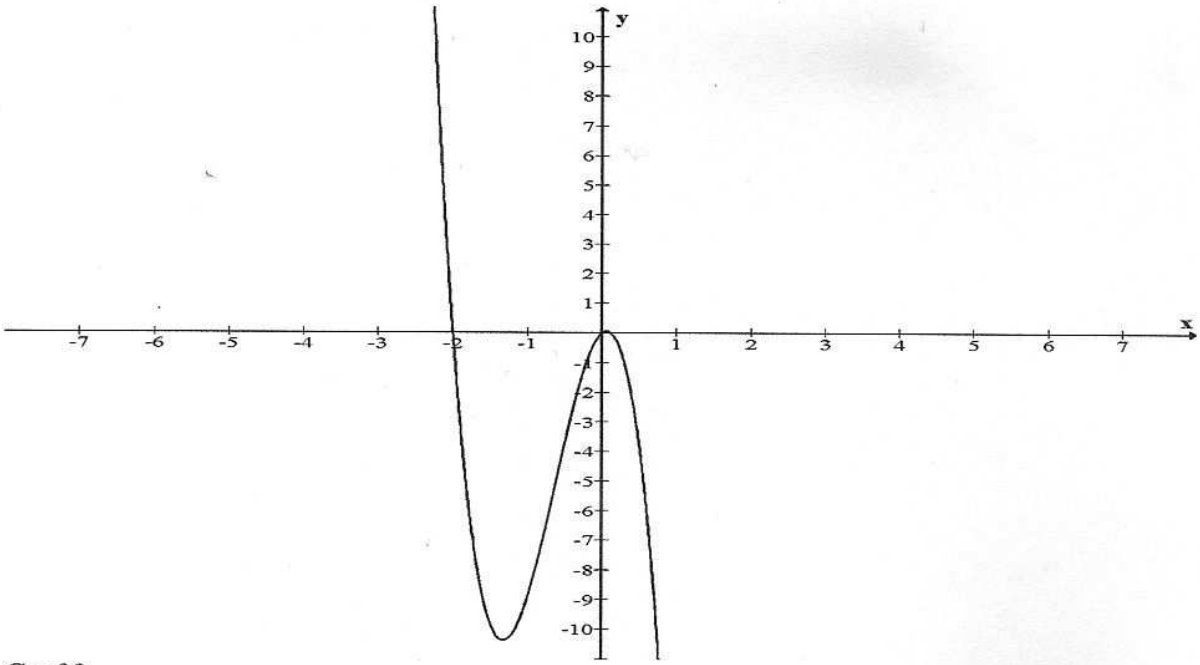
Skole: Niels Brock	**Hold:**
Eksamensnr.	**Navn:** Peter [illegible]

$x \cdot \ln(x) - x = 0$	*Vi ønsker at løse ligningen* $x \cdot \ln(x) - x = 0$
$x \cdot (\ln(x) - 1) = 0$	*Vi sætter* x *udenfor en parentes.*
$x = 0 \vee \ln(x) - 1 = 0$	Vi benytter nulreglen
$x = 0 \vee \ln(x) = 1$	Vi lægger 1 til på begge sider af lighedstegnet
$x = 0 \vee x = e^1$	Vi tager eksponentialfunktionen på begge sider af lighedstegnet
$L = \{e\}$	*Ligningen har løsningen* $x = e$

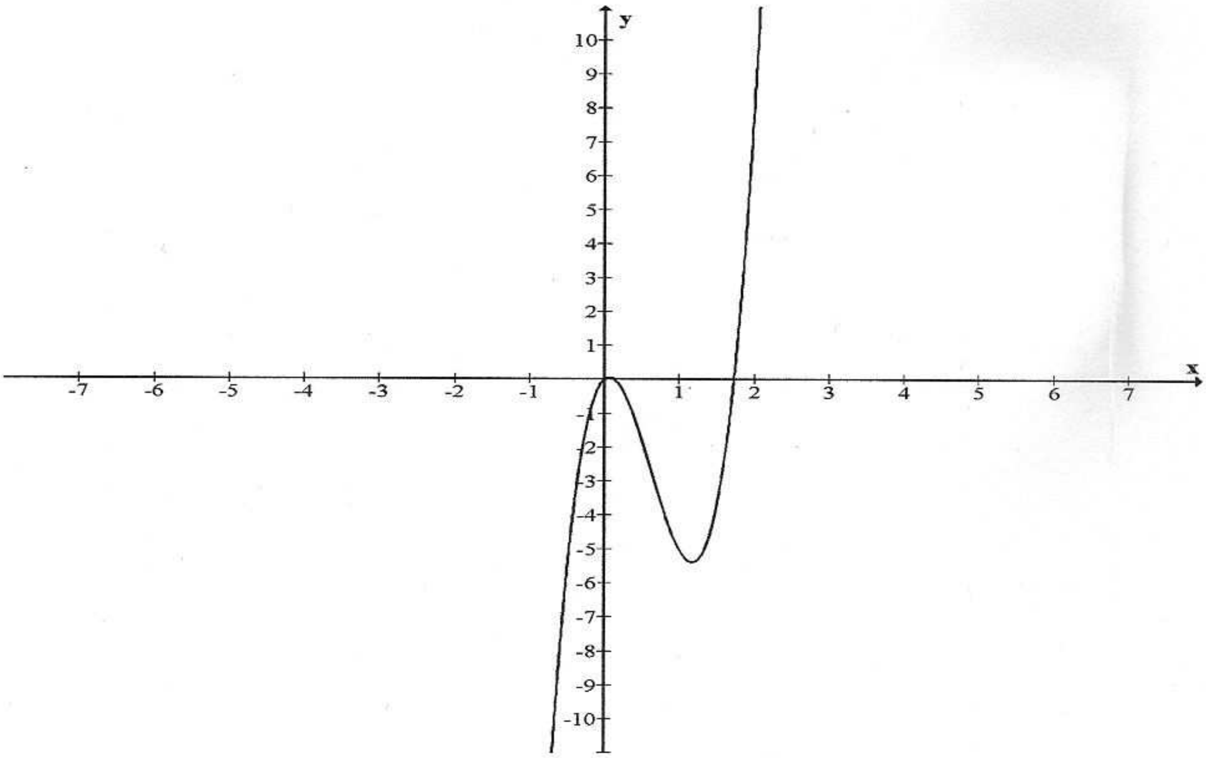
Bilag 2 til opgave 7 (med hjælpemidler) – skal afleveres.

Skole: Niels Brock	Hold:
Eksamensnr.	Navn: Peter [illegible]

Graf 1.



Graf 2.



Bilag [illegible] til opgave 8B (med hjælpemidler) – skal afleveres.

Skole: Niels Brock	**Hold:**
Eksamensnr.	**Navn:** Peter [illegible]