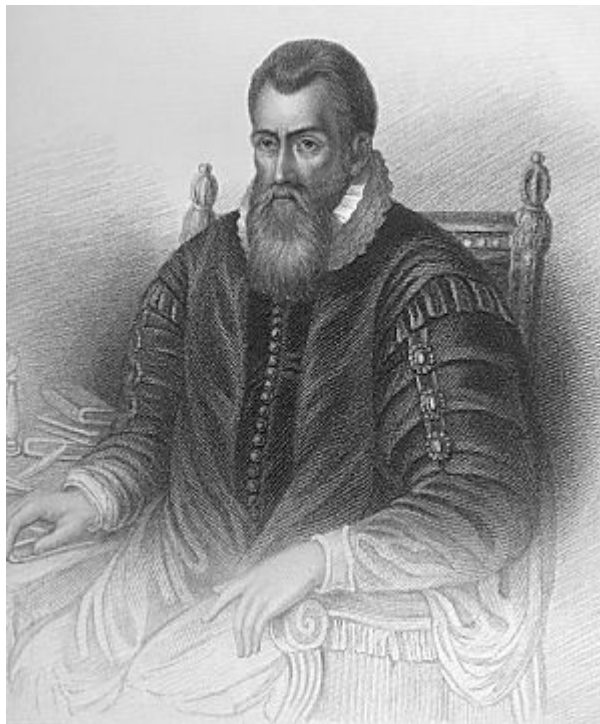


## Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner



John Napier (1550-1617).

Peter Haremoës  
Niels Brock

26. marts 2020

# 1 Indledning

Ekspontial- og logaritmefunktioner blev indført på Mat C niveau, men dengang havde vi ikke mulighed for at give en præcis definition. Funktionerne blev indført og antoges at have visse egenskaber, men at der overhovedet findes sådanne funktioner blev blot taget for givet. Med integralregning til rådighed kan vi imidlertid lave præcise definitioner og bevise en mængde sætninger og regneregler.

Logaritmefunktionerne blev indført af Napier i 1614, der brugte dem som et redskab til hurtigt at udregne rødder og multiplikationer. Napier var iøvrigt også den første, som brugte decimalkomma på en systematisk måde.

# 2 Definition af logaritmefunktionen

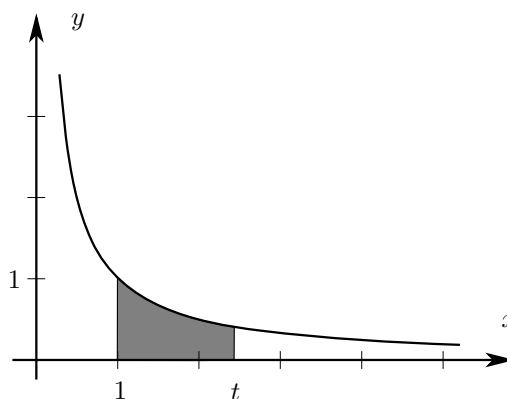
Vi vil bruge følgende sætning, som også står i Mat A bogen:

**Sætning 1** *Enhver kontinuert funktion af en variabel har en stamfunktion. Hvis funktionen er defineret på et interval er stamfunktionen entydigt bestemt bortset fra en additiv konstant.*

Med denne sætning til rådighed kan vi definere logaritmefunktionen.

**Definition 2** *For  $t \in ]0; \infty[$  er den naturlige logaritme defineret ved*

$$\ln(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx .$$



Figur 1: Arealet fra  $x = 1$  til  $x = t$  under  $y = 1/x$  er markeret.

For  $t > 1$  kan vi identificere integralet med arealet under funktionen  $f(x) = 1/x$  fra  $x = 1$  til  $x = t$ . For  $t < 1$  er integralet lig minus arealet under funktionen  $f(x) = 1/x$  fra  $x = t$  til  $x = 1$ . Hvis  $t = 1$  får vi blot  $\ln(1) = 0$ . Hvis man vil udregne værdien af den naturlige logaritme for en given værdi af  $t$ , kan dette ske ved numerisk integration. Herved kan man få bestemt  $\ln(t)$  med lige så mange decimaler som man kunne ønske sig.

**Sætning 3** Den naturlige logaritmefunktion opfylder:

1. Hvis  $f(x) = \ln(x)$  så er  $f'(x) = 1/x$ .

2. For  $s, t > 0$  og et naturligt tal  $n$  gælder

$$\ln(s \cdot t) = \ln(s) + \ln(t),$$

$$\ln\left(\frac{s}{t}\right) = \ln(s) - \ln(t),$$

$$\ln(t^n) = n \ln t.$$

3. Den naturlige logaritmefunktion er kontinuert og voksende.

4. Den naturlige logaritmefunktion er hverken begrænset opad eller nedad i den forstand at

$$\ln(t) \rightarrow \infty \quad \text{for } t \rightarrow \infty,$$

$$\ln(t) \rightarrow -\infty \quad \text{for } t \rightarrow 0_+.$$

5. Definitions- og værdimængde er givet ved  $Dm(\ln) = ]0; \infty[$  og  $Vm(\ln) = \mathbb{R}$ .

**Proof.**

1. Dette følger af at den naturlige logaritme er defineret som en stamfunktion til  $1/x$ .

2. For  $s, t > 0$  gælder at

$$\begin{aligned} \ln(s \cdot t) &= \int_1^{s \cdot t} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^s \frac{1}{x} dx + \int_s^{s \cdot t} \frac{1}{x} dx \\ &= \ln(s) + \int_s^{s \cdot t} \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Vi foretager nu substitutionen  $y = x/s$  i det sidste integral og får

$$\begin{aligned} \int_s^{s \cdot t} \frac{1}{x} dx &= \int_1^t \frac{1}{s \cdot y} \cdot s dy \\ &= \int_1^t \frac{1}{y} dy \\ &= \ln(t). \end{aligned}$$

Endvidere har vi

$$\ln(s) = \ln\left(\frac{s}{t} \cdot t\right) = \ln\left(\frac{s}{t}\right) + \ln(t)$$

og dermed

$$\ln\left(\frac{s}{t}\right) = \ln(s) - \ln(t).$$

Den sidste formel fås ved

$$\begin{aligned}\ln(t^n) &= \ln\left(\underbrace{t \cdot t \cdot \dots \cdot t}_{n \text{ gange}}\right) \\ &= \underbrace{\ln(t) + \ln(t) + \dots + \ln(t)}_{n \text{ gange}} \\ &= n \cdot \ln(t).\end{aligned}$$

3. Da den naturlige logaritme er differentiabel er den kontinuert. Da den afledte af  $\ln$  er positiv er  $\ln$  en voksende funktion.
4. Først viser vi at  $\ln(t) \rightarrow \infty$  for  $t \rightarrow \infty$ . Funktionen er voksende, så det er tilstrækkeligt at vise, at logaritmefunktionen kan antage vilkårligt store værdier. Vi har  $\ln(2^n) = n \cdot \ln 2$ , så hvis  $n$  er stor er  $\ln(2^n)$  stor. For værdier  $t < 1$  benytter vi at  $\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{1/t}\right) = \ln(1) - \ln(1/t) = -\ln(1/t)$ . Den anden grænseværdi kan nu bestemmes ud fra at  $1/t \rightarrow \infty$  for  $t \rightarrow 0$ .
5. Dette følger fra de foregående egenskaber.

■

Logaritmen med grundtal  $a > 1$  kan nu defineres ud fra den naturlige logaritme ved

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Med denne definition ser vi at  $\log_a(a) = 1$ . Grundtallet for en logaritmefunktion er med andre ord det tal, hvis logaritme er 1. Hvis vi skal finde grundtallet for den naturlige logaritmefunktion skal vi derfor løse ligningen  $\ln(t) = 1$  eller  $\int_1^t x^{-1} dx = 1$ . Løsningen til ligningen har navnet  $e$  og den omtrentlige værdi er 2.7183.

Logaritmefunktionen med grundtal  $a$  er ligesom den naturlige logaritme kontinuert og voksende og opfylder de samme logaritmeregler. Den afledte af logaritmefunktionen med grundtal  $a$  er  $\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$ . Vi kan derfor sige at den naturlige logaritmefunktion er karakteriseret ved at den afledte i  $x = 1$  er 1. Det approksimerende 1.-gradspolynomium nær 1 er derfor givet ved

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1) + 1 \cdot (x - 1) \\ &= x - 1.\end{aligned}$$

En tilnærmet værdi for  $e$  kan vi bestemme ved følgende udregning:

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\approx n\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Derfor er  $e$  cirka lig med  $(1 + \frac{1}{n})^n$  og denne approksimation bliver bedre jo større  $n$  vælges. Der gælder med andre ord at  $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$  for  $n \rightarrow \infty$ .

### 3 Eksponentialfunktioner

Vi starter med den naturlige eksponentialfunktion.

**Definition 4** Den naturlige eksponentialfunktion er defineret som den inverse funktion til den naturlige logaritmefunktion. Den naturlige eksponentialfunktion betegnes  $\exp$ .

Denne definition giver naturligvis kun mening hvis den naturlige logaritmefunktion har en invers funktion, men det bliver netop sikret ved egenskaberne 1-5 for den naturlige logaritmefunktion.

**Sætning 5** Den naturlige eksponentialfunktion opfylder

1. Hvis  $f(x) = \exp(x)$  så er  $f'(x) = \exp(x)$ .

2. For reelle tal  $x$  og  $y$  og et naturligt tal  $n$  gælder:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

3. Den naturlige eksponentialfunktion er kontinuert og voksende.

4. Den naturlige eksponentialfunktion opfylder

$$\exp(x) \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow +\infty,$$

$$\exp(x) \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow -\infty.$$

5. Definitions- og værdimængde er givet ved  $Dm(\exp) = \mathbb{R}$  og  $Vm(\exp) = ]0; \infty[$ .

**Bevis.** Disse egenskaber bevises ved at oversætte de tilsvarende resultater for den naturlige logaritmefunktion til resultater for den inverse funktion. Egenskab 1. er den eneste som kræver lidt mere arbejde. Da er

$$x = \ln(\exp(x)).$$

Vi differentierer på begge sider af lighedstegnet og får

$$\begin{aligned} 1 &= \ln'(\exp(x)) \cdot \exp'(x) \\ &= \frac{1}{\exp(x)} \exp'(x). \end{aligned}$$

Resultatet fås ved at gange med  $\exp(x)$  på begge sider af lighedstegnet. ■

Ekspontialfunktionen med grundtal  $a$  definerer vi som den inverse funktion til logaritmfunktionen med grundtal  $a$ . For at finde et pænt udtryk for eksponentialfunktionen med grundtal  $a$  løser vi ligningen

$$\log_a(y) = x.$$

Da  $\log_a(y) = \ln(y) / \ln(a)$  får vi

$$\ln(y) = x \ln(a)$$

og dermed

$$y = \exp(x \ln(a)).$$

Funktionen, som afbilder  $x$  over i  $\exp(x \ln a)$ , er således eksponentialfunktionen med grundtal  $a$ . Hvis  $x$  er et naturligt tal har vi

$$y = \exp(x \ln a) = \exp(\ln a^x) = a^x.$$

Hvis  $x$  ikke er et naturligt tal kan vi bruge

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

som betegnelse for eksponentialfunktionen med grundtal  $a$ . Vi ser nu at

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x),$$

så  $e^x$  er en kortere måde at skrive den naturlige eksponentialfunktion.

**Sætning 6** *Ekspontialfunktionen med grundtal  $a > 0$  opfylder*

1. Hvis  $f(x) = a^x$  så er  $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ .
2. For reelle tal  $x$  og  $y$  og et positivt tal  $b$  gælder potensreglerne

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

3. *Ekspontialfunktioner er kontinuerte. De er voksende hvis  $a > 1$ , aftagende hvis  $a < 1$  og konstant hvis  $a = 1$ .*
4. *Hvis  $a > 1$ , så gælder*

$$a^x \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow +\infty,$$

$$a^x \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow -\infty.$$

*Hvis  $a < 1$ , så gælder*

$$a^x \rightarrow 0 \text{ for } x \rightarrow +\infty,$$

$$a^x \rightarrow \infty \text{ for } x \rightarrow -\infty.$$

5. *Definitions- og værdimængde er givet ved  $Dm(a^x) = \mathbb{R}$  og hvis  $a \neq 1$  så er  $Vm(a^x) = ]0; \infty[$ .*

## 4 Potens og rod

For  $a \in \mathbb{R}$  er potensfunktionen  $x^a, x > 0$  defineret som  $x^a = e^{a \ln x}$ . Den kan nu differentieres som en sammensat funktion, hvilket giver

$$e^{a \ln x} \cdot a \frac{1}{x} = x^a \cdot a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Vi kan udregne den inverse til en potensfunktion. Vi har

$$y = x^a \iff (y)^{1/a} = (x^a)^{1/a} = x^{a \cdot 1/a} = x^1 = x.$$

Den inverse funktion til  $x^a$  er derfor  $x^{1/a}$  og dermed selv en potensfunktion. Hvis  $a$  er et heltal, er der dog en særlig skrivemåde for  $x^{1/a}$ , som er  $\sqrt[a]{x}$ . Det vil sige, at kvadratrødder, kubikrødder osv. blot er potenser i forklædning. Den antikverede skrivemåde  $\sqrt[a]{x}$  er måske dekorativ men er ivotrigt ret upraktisk.

Potensreglerne gælder altid så længe grundtallet er positivt. Det er ikke muligt generelt at definere potenser af negative tal således at potensreglerne bliver ved med at gælde.