Opg. 1

Da $\vec{a}\cdot\vec{b} = \binom{4}{2}\cdot\binom{-3}{6} = 4\cdot(-3)+2\cdot 6 = 0$ er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ortogonale.

Da $\hat{b}\cdot\vec{c}$ $\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & -4\end{vmatrix} = (-3)\cdot(-4) - 6\cdot 2 = 0$ er $\vec{b}$ og c parallelle.

Opg. 2

Funktionen f er givet ved $f(x) = -x^2+10x$, så $f'(x) = -2x+10$.
Tangenten med røringspunktet $(2,16)$ er derfor givet ved
$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 16 + 6(x-2) = 6x+4$.

Opg. 3

Det ubestemte integral udregnes for $x>0$:

$$\int\left(3x^2+2-\frac{1}{x}\right)dx = x^3+2x-\ln(x)+k,\ k\in\mathbb{R}$$

For $x<0$ bliver resultatet

$$\int\left(3x^2+2-\frac{1}{x}\right)dx = x^3+2x-\ln(-x)+k,\ k\in\mathbb{R}$$

Opg. 4

Ifølge arealformelen gælder

$$\frac{1}{2}\,a\,b\,\sin(\angle C) = 20$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot 8\cdot 0{,}5 = 20$$
$$\Updownarrow$$
$$a = 10$$

Opg. 5

Om en vare gælder at prisen er givet ved $f(x) = ax+b$ hvor x betegner afsætningen. Funktionen opfylder
$f(100) = 300$ og $f(200) = 100$ så $a = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{100-300}{200-100} = -2$.
Konstanten b bestemmes ved $300 = -2\cdot 100 + b$, så $b = 500$.
Funktionen er derfor givet ved $f(x) = -2x+500$.

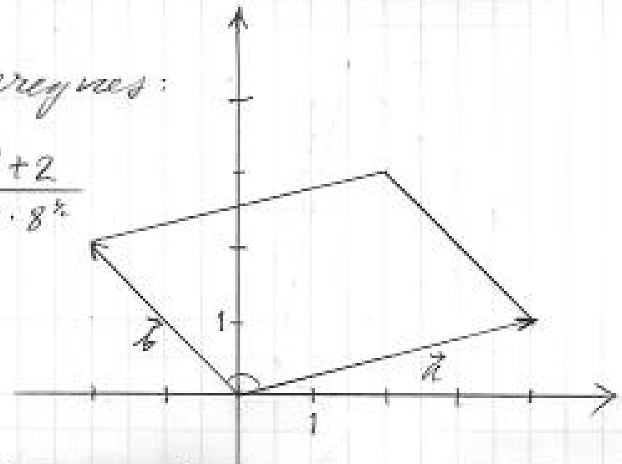
Opg. 1

a) Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ beregnes:

$$\cos(\angle(\vec{a},\vec{b})) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{-2}{2}}{(4^2+1^2)^{1/2}(-2^2+2^2)^{1/2}} = \frac{-8+2}{17^{1/2}\cdot 8^{1/2}}$$

$$= \frac{-3}{17^{1/2}\cdot 2^{1/2}} = -0{,}5145$$

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \cos^{-1}(-0{,}5145) = \underline{\underline{120{,}96^\circ}}$$

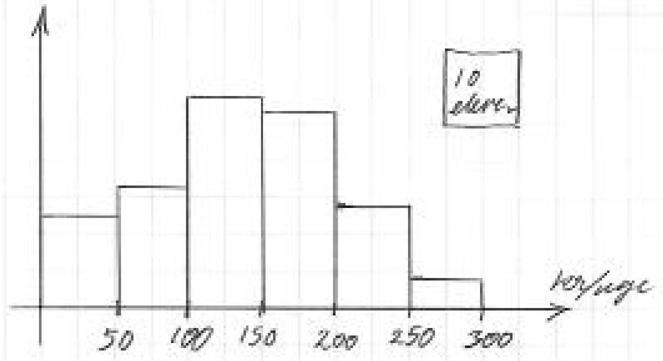


b) Arealet af det udspændte parallelogram er

$$|\hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}| = \begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 4\cdot 2 - 1\cdot(-2) = \underline{\underline{10}}$$

Opg. 2

a)



b) Typeintervallet er]100;150]

Gennemsnittet er $\frac{12\cdot 25 + 16\cdot 75 + 28\cdot 125 + 26\cdot 175 + 14\cdot 225 + 4\cdot 275}{100} = \underline{\underline{138}}$

Opg. 3

a) Den samlede omsætning er

$$O(x,y) = x\cdot p(x) + y\cdot q(y)$$

$$= x\cdot(-0{,}4x+20) + y\cdot(-0{,}1y+10)$$

$$= -0{,}4x^2+20x - 0{,}1y^2 + 10y$$

Opg 3 b) Niveaukurven $N(250)$ bestemmes

$$O(x,y) = 250$$

$$-0{,}4x^2+20x-0{,}1y^2+10y = 250$$

$$-0{,}4(x^2-50x)-0{,}1(y^2-100y) = 250$$

$$-0{,}4((x-25)^2-25^2)-0{,}1((y-50)^2-50^2) = 250$$

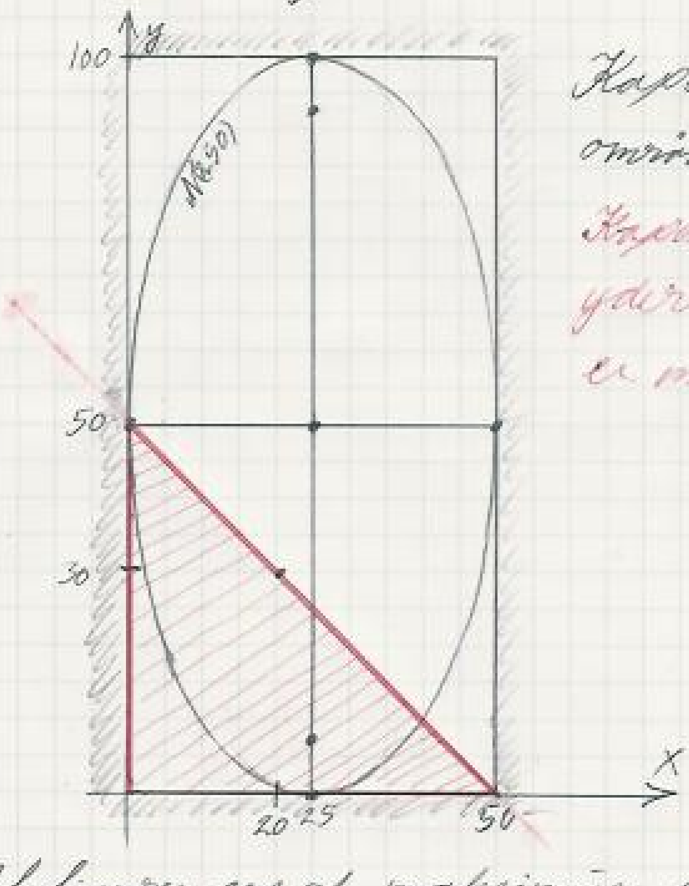
$$-0{,}4(x-25)^2-0{,}1(y-50)^2 = 250-0{,}4\cdot25^2-0{,}1\cdot50^2 = -250$$

$$-0{,}4\frac{(x-25)^2}{-250}-0{,}1\frac{(y-50)^2}{-250} = 1$$

$$\frac{(x-25)^2}{625}+\frac{(y-50)}{2500} = 1$$

$$\frac{(x-25)^2}{25^2}\quad\frac{(y-50)^2}{50^2} = 1$$

c)



Kapacitetsområdet er området inden for skraveringen.

Kapacitetsområdet med den yderligere begrænsning er markeret med rød skravering.

d) Af figuren ses at maksimum antages på linjen $y = 50-x$, $x\in[0;50]$. Vi skal derfor maksimere $g(x)=-0{,}4x^2+20x-0{,}1(50-x)^2+10(50-x)$. Ved hjælp af lommeregneren (TI-83+) ~~findes~~ maksimum at være 450 for $x=20$. Der skal derfor produceres <u>20</u> A og $50-20=$<u>30</u> B for at opnå den maksimale omsætning.

Opg. 4

a) Lånets hovedstol er 24 000,00 kroner. Den faste ydelse er rente plus afdrag $= 480,00 + 987,76 = 1467,76$ kroner pr. termin. Rentefoden er $480,00/24\,000,00 = 0,02 = 2\%$.

b) Restgælden efter 8. ydelse er

$$24\,000 \cdot 1,02^8 - \frac{1,02^8 - 1}{0,02} \cdot 1467,76 = \underline{15\,522,09} \text{ kroner}$$

Opg. 5

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2 \,,$$

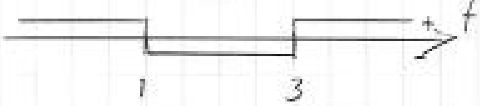
så

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \,,$$

$$f''(x) = 6x - 12 \,.$$

a) Monotoniforholdene bestemmes ved først at finde stationære punkter:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm (4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}.$$



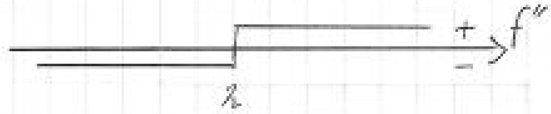
f er voksende i $]-\infty; 1]$,

f er aftagende i $[1; 3]$,

f er voksende i $[3; \infty[$.

b) Krumningsforholdene bestemmes ved først at løse ligningen

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



f er konkav i $]-\infty; 2]$,

f er konveks i $[2; \infty[$.

Det ses at f skifter krumning for $x = 2$.

c) Arealet af området som afgrænses af x-aksen, linjen $x = 1$, funktionen og y-aksen er

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 9x + 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 2 + \frac{9}{2} + 2 - 0 = \underline{4\tfrac{3}{4}}.$$

Opg. 6 Se bilag 1.

Opg. 7

a) Skæringspunktet mellem f og l bestemmes

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x^2-5x+4 \\ y &= x+1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x+1 &= 3x^2-5x+4 \\ y &= x+1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= 3x^2-6x+3 \\ y &= x+1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{-(-6)\pm 0^2}{2} = 1 \\ y &= 1+1 = 2 \end{aligned}\right\}$$

Skæringspunktet er $\underline{(1,2)}$.

Den afledte af f er $f'(x) = 6x-5$, så $f'(1) = 6\cdot 1-5 = 1$.

Da hældningen af l er lig $f'(1)$ og l går ~~gennem~~ $(1, f(1))$ er l tangent til f.

b) Arealet af det skraverede område er

$$\int_0^1 \left((3x^2-5x+4)-(x+1)\right)dx = \int_0^1 (3x^2-6x+3)\,dx = \left[x^3-3x^2+3x\right]_0^1 = 1-3+3-0 = \underline{\underline{1}}$$

Opg. 8A

a) Hvis råvareprisen er x de samlede omkostninger $x+500$. Salgsprisen ekskl. moms er da $1{,}60\cdot(x+500)$ og salgsprisen inkl. moms bliver

$$\begin{aligned} f(x) &= 1{,}25\cdot 1{,}60(x+500) \\ &= 2\cdot(x+500) \\ &= 2x+1000. \end{aligned}$$

b) Lad y angive salgspris inkl. moms. Da gælder

$$\begin{aligned} y &= 2x+1000 \\ &\Updownarrow \\ y-1000 &= 2x \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{y-1000}{2} = \frac{1}{2}y-500 \end{aligned}$$

Råvareprisen som funktion af salgsprisen er da givet ved $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y-500$.

Opg. 8B

Hjørnerne for det angivne polygonområde aflæses til $(0,0)$, $(14,0)$, $(12,4)$, $(3,16)$ og $(0,17\frac{1}{2})$. Dette checkes ved at sætte ind i linjernes ligninger.

a) Dækningsbidraget udregnes i hjørnerne:

$$f(0,0) = 30\cdot 0 + 20\cdot 0 = 0,$$
$$f(14,0) = 30\cdot 14 + 20\cdot 0 = 420,$$
$$f(12,4) = 30\cdot 12 + 20\cdot 4 = 440,$$
$$f(3,16) = 30\cdot 3 + 20\cdot 16 = 410,$$
$$f(0,17\tfrac{1}{2}) = 30\cdot 0 + 20\cdot 17\tfrac{1}{2} = 350.$$

Det maksimale dækningsbidrag 440 opnås ved at producere 12 planglas og 4 spejle.

b) Lad d betegne dækningsbidraget pr. spejl. Da er dækningsbidraget maksimalt for 12 planglas og 4 spejle netop hvis

$$\left.\begin{array}{c} f(12,4) \geq f(14,0) \\ \text{og} \\ f(12,4) \geq f(3,16) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 30\cdot 12 + d\cdot 4 \geq 30\cdot 14 + d\cdot 0 \\ \text{og} \\ 30\cdot 12 + d\cdot 4 \geq 30\cdot 3 + d\cdot 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} d\cdot 4 \geq 30\cdot 2 \\ \text{og} \\ 30\cdot 9 \geq d\cdot 12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} d \geq 15 \\ \\ 22\tfrac{1}{2} \geq d \end{array}$$

Dækningsbidraget pr. spejl skal derfor ligge i intervallet $[15; 22\frac{1}{2}]$ for at 12 planglas og 4 spejle skal være den optimale produktionssammensætning.

Bilag 1 til opgave 6 (med hjælpemidler).

Skole: Niels Brock	Hold:
Eksamensnr.	Navn: Peter Hammoë

$e^{x^2-4x}-1=0$	funktionen sættes lig med nul.
$e^{x^2-4x}=1$	1 lægges til på begge sider
$x^2-4x=0$	naturlig logaritme tages på begge sider
$x\cdot(x-4)=0$	Udtrykket faktoriseres
$x=0 \vee x=4$	Nulregel benyttes.

Bilag 2 til opgave 8B (med hjælpemidler).

Skole: Niels Brock	Hold:
Eksamensnr.	Navn: Peter Hansemann