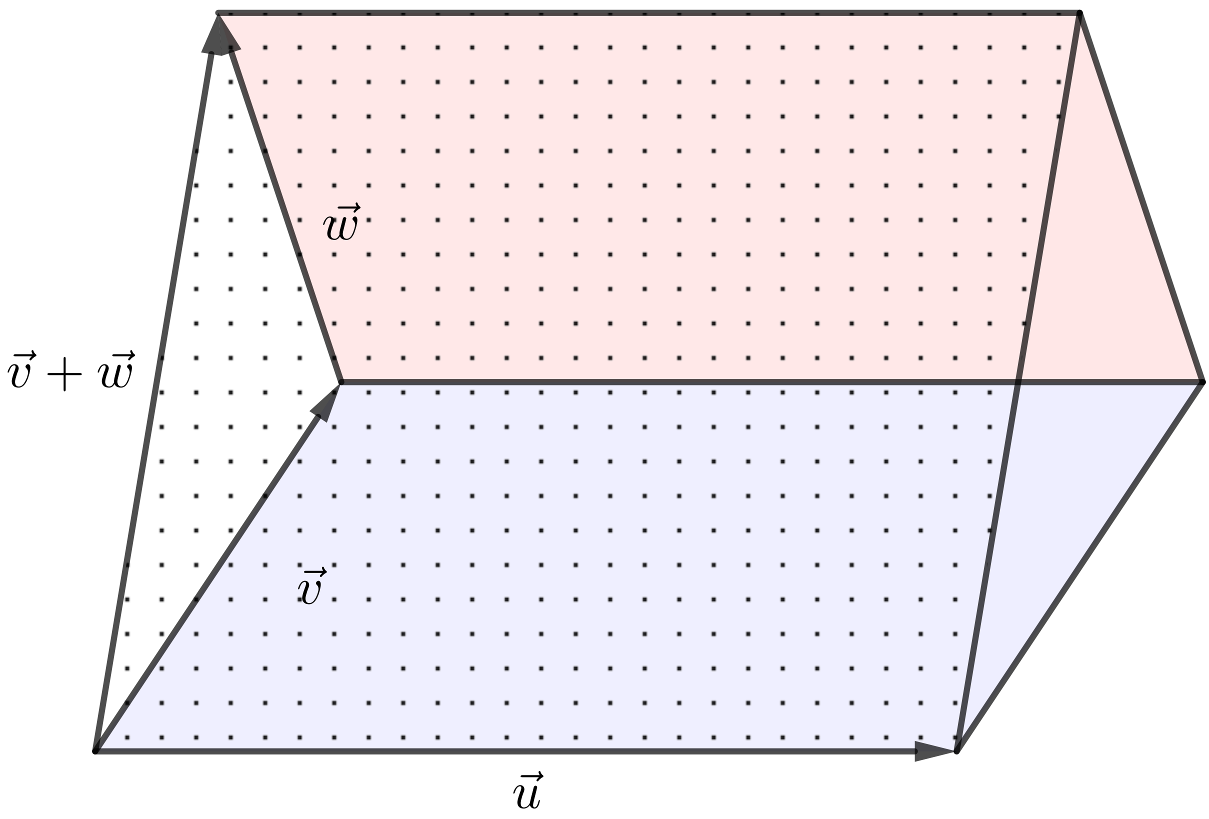
Vektorregning

Peter Harremoës



Niels Brock, 17. februar 2020

1 Gennemsnit og tyngdepunkter

Vi skal beskæftige os med med vektorregning i 2 dimensioner, men det kan være nyttigt at starte i en dimension. Blandt andet giver det os anledning til at gennemgå nogle ideer, som er vigtige i både vektorregning, statistik, sandsynlighedsregning og integralregning.

Et datasæt er en liste, der typisk består af en række objekter i en given rækkefølge. Gentagelser er tilladt. Et datasæt kunne f.eks. være tallene $[20, 30, 30, 40, 50, 20, 40, 30, 10, 30]$. Gennemsnittet kan beregnes som

$$\frac{20 + 30 + 30 + 40 + 50 + 20 + 40 + 30 + 10 + 30}{10} = \frac{300}{10} = 30\,.$$

Vi tænker os nu at vi også har et andet observationssæt $[30, 40, 50, 50, 55]$ og udregner gennemsnittet til 45. Hvis vi nu forestiller os, at de to observationssæt sættes sammen til et stort observationssæt med 15 observationer, så kan vi udregne gennemsnittet af det samlede observationssæt som

$$\begin{aligned}\frac{10 \cdot 30 + 5 \cdot 45}{15} &= \frac{10}{15} \cdot 30 + \frac{5}{15} \cdot 45 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 30 + \frac{1}{3} \cdot 45 \\ &= 35.\end{aligned}$$

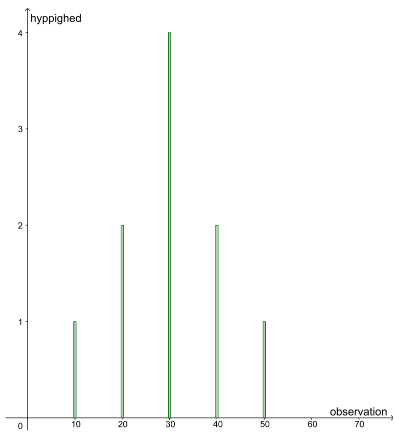
Det samlede gennemsnit kan derfor udregnes som et vægtet gennemsnit af gennemsnittene for de grupperede data, hvor vægtene er bestemt af hvor stor en andel de enkelte observationssæt udgør af det samlede observationssæt.

For at lette beregning af gennemsnit vil det ofte være en fordel først at ordne observationsssættet så det bliver $[10, 20, 20, 30, 30, 30, 30, 40, 40, 50]$. Vi kan nu lave en tabel.

Værdi	Antal	Andel
10	1	0.1
20	2	0.2
30	4	0.4
40	2	0.2
50	1	0.1
I alt	10	1.0

Nu kan gennemsnittet beregnes som

$$10 \cdot 0.1 + 20 \cdot 0.2 + 30 \cdot 0.4 + 40 \cdot 0.2 + 50 \cdot 0.1.$$



2 Tyngdepunkter

Grunden til at det hedder et vægtet gennemsnit skyldes, at beregning af vægtede gennemsnit hænger nøje sammen med Archimedes' (ca. 287-212 f.Kr.) teori for beregning af tyngdepunkter. Beregninger, som involverer vægte regnes ganske vist oftest til faget fysik, men Archimedes udviklede en rent matematisk teori for dette emne, og det er også sådan vi her skal behandle teorien. I fysik vil man skelne mellem vægt og masse, men det vil vi ikke gøre, da det er irrelevant for vores emne.

Eksempel 1. Vi tænker os, at vi placerer nogle lodder på en vægtsstang som er inddelt i cm således at der placeres 1 kg ved 10 cm, 2 kg ved 20 cm, 4 kg ved 30 cm, 2 kg ved 40 cm og 1 kg ved 50 cm. Vægtene ligger nu symmetrisk placeret omkring punktet 30 cm, så tyngdepunktet ligger i dette punkt og det svarer til at der 10 kg samlet i dette punkt.

Eksempel 2. Vi tænker os 1 kg placeret ved 10 cm og 5 kg placeret ved 70 cm, og vi ønsker nu at beregne tyngdepunktet. Vi spreder nu de 5 kg symmetrisk ud omkring punktet 70 cm med 20 cm afstand. Herved får vi placeret 1 kg i hvert af punkterne 30 cm, 50 cm, 70 cm, 90 cm og 110 cm. Der var også 1 kg i 10 cm, så nu ligger lodderne symmetrisk fordelt omkring 60 cm, som derfor må være tyngdepunktet og den samlede vægt er 6 kg. Placeringen af tyngdepunktet kan vi også beregne som

$$\frac{10 \cdot 1 + 70 \cdot 5}{6} = \frac{360}{6} = 60\,.$$

Alternativt kunne vi have lavet beregningen som

$$10 \cdot \frac{1}{6} + 70 \cdot \frac{5}{6} = 60\,.$$

Vi ser derfor at 1 kg i 50 cm afstand balancerer med 5 kg i 10 cm afstand. Betingelsen for balance er således at forholdet mellem afstandene skal være det samme som forholdet mellem vægtene.

Hvis vi placerer massen m i punktet P, vil vi betegne det $m \cdot P$. Det vil vi kalde et *massepunkt*. Vi vil skrive

$$P_1 \cdot m_1 + P_2 \cdot m_2 = P_3 \cdot m_3$$

hvis $m_3 = m_1 + m_2$ og P_3 er tyngdepunktet for $P_1 \cdot m_1$ og $P_2 \cdot m_2$ Tyngdepunktet P_3 kan vi finde ved at dele linkjestykket fra P_1 til P_2 i 2 linjestykker i forholdet $m_2 : m_1$. Hvis P_1og P_2 befinder sig på en tallinje ved talværdierne x_1 og x_2, så vil P_3 befinde sig ved talværdien $\frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot x_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot x_2$.
Vi forestiller os nu at punkterne ligger på en koordinatakse i et koordinatsystem. Hvis alle punkter ligger på linje, kan vi nøjes med at angive en enkelt koordinat. Det være praktisk at indføre såkaldte *homogene koordinater* for massepunkter. Hvis massen m placeres i punktet P med koordinat (x) ,så vil vi skrive massepunktet som $m \cdot P = (mx : m)$. Et punkt med masse 1 vil således have homogene koordinater $(x : 1)$. Normal adskilles koordinaterne i et koordinatsæt med kommaer, men for at gøre det tydeligt at der er tale om homogene koordinaterne adskiller vi her de enkelte koordinater med kolon. Med homogene koordinater bliver det ganske let at beregne massemidtpunkter.

Eksempel 3. Antag at massen 2 er placeret i punktet med koordinat (4). Dette massepunkt har homogene koordinater $2 \cdot (4) = (8 : 2)$. Hvis en masse på 4 placeres i punktet (1), så bliver massepunktets homogene koordinater $(4 : 4)$. det samlede system får da koordinater

$$\begin{aligned} 2 \cdot (4) + 4 \cdot (1) &= (8 : 2) + (4 : 4) \\ &= (12 : 6) \\ &= 6 \cdot (2)\,. \end{aligned}$$

Det samlede system har derfor masse 6 placeret i et punkt 2 ude ad x-aksen.

Med en vægtsstang forestiler man sig normalt at man placerer lodder med positiv vægt. Man kan imidlertid også forestiller sig at der ud over lodderne er placeret nogle gasballoner, som giver opdrift. Det vil i forhold til beregninger af tyngdepunkter svare til at vi tillader nogle af masserne at være negative. Beregningerne foregår som udgangspunkt på samme måde som med positive masser.

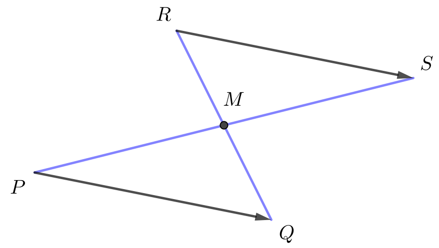
3 Vektorer i 2 dimensioner

De ting, vi har nævnt om massepunkter, gælder stort set uændret i 2 dimensioner. I 2 dimensioner giver tyngdepunkter os endvidere nogle metoder til at løse geometriske problemer.

Eksempel 4. Antag at massen 1 er placeret i hvert af hjørnerne i en trekant ABC. Det samlede massepunkt er

$$1 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C = 3 \cdot T,$$

hvor T er tyngdepunktet. Dette tyngdepunkt kan beregnes på 3 måder. Vi kan først finde tyngdepunktet af $1 \cdot A$ og $1 \cdot B$, hvilket er $1 \cdot A + 1 \cdot B = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B\right) = 2 \cdot M_c$, hvilket er midtpunktet M_c af linjestykket



Figur 1: Ens vektorer.

$\overline{AB}$. Derfor gælder

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3}\cdot A + \frac{1}{3}\cdot B + \frac{1}{3}\cdot C \\ &= \frac{2}{3}\cdot M_c + \frac{1}{3}\cdot C. \end{aligned}$$

Linjen mellem M_c og C kaldes en median i trekanten. Vi ser at tyngdepunktet ligger på medianen og deler denne i forholdet 1:2 . Tilsvarende ligger tyngdepunktet på de øvrige medianer, så tyngdepunktet må være skæringspunktet mellem medianerne. Specielt ser vi at medianerne må skære hinanden i et enkelt punkt.

Ligesom i 1 dimension kan man angive massepunkter ved deres homogene koordinater. Hvis massen m er placeret i et punkt med koordinater (x, y) , så har massepunktet homogene koordinater $(mx : my : m)$.

En vigtig og lidt speciel situation opstår, hvis man placerer massen -m i punktet P og man placerer massen m i punktet Q. Her er den samlede masse nul. Vi kan prøve at lave udregningen

$$\begin{aligned} m\cdot P + (\text{-}m\cdot P + m\cdot Q) &= m\cdot P - m\cdot P + m\cdot Q \\ &= m\cdot Q. \end{aligned}$$

Det vil sige, at hvis vi starter med massen m placeret i P og lægger $-m\cdot P + m\cdot Q$ til, så vil resultatet være massen m placeret i punktet Q. Størrelsen -$m\cdot P + m\cdot Q$ kan således opfattes som en flytning af masse m fra punktet P til punktet Q. Hvis $m = 1$, skriver vi -1 $\cdot P + 1\cdot Q = \overrightarrow{PQ}$ og vi får $1\cdot P + \overrightarrow{PQ} = 1\cdot Q$. Størrelsen $\overrightarrow{PQ}$ kaldes *en vektor*, og en sådan vektor kan opfattes som en flytning, som flytter punktet P over i punktet Q. Ordet vektor kommer af latin VECTOR, som betyder 'en som flytter' eller 'en som bærer'. Man vil normalt illustrere vektoren $\overrightarrow{PQ}$ med en pil fra punktet P til punktet Q.

Vi kan nu undersøge, hvad det vil sige, at to vektorer i 2 dimensioner er ens.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{RS} \\ 1\cdot Q - 1\cdot P &= 1\cdot S - 1\cdot R \\ 1\cdot Q + 1\cdot R &= 1\cdot S + 1\cdot P \\ \frac{1}{2}\cdot Q + \frac{1}{2}\cdot R &= \frac{1}{2}\cdot S + \frac{1}{2}\cdot P \end{aligned}$$

Vi kalder midtpunktet for M. Hvis man roterer trekant PQM en havl tørn rundt om M så vil man få trekant MSR. Derfor må linjestykket $\overline{PQ}$ være lige så langt som og parallelt med linjestykket $\overline{QR}$. Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ er således den samme vektor som vektoren $\overrightarrow{RS}$, hvis de to vektorer har samme længde og samme retning.

I 2 dimensioner er to vektorer ens, hvis de er paralelle med samme retning og samme længde. Vektorer kan derfor bruges til at repræsentere størrelser, som både har en størrelse og en retning. Det gælder f.eks. fysiske begreber såsom hastighed, elektriske felter eller magnetiske felter.

Sætning 1 (Indskudsreglen)**.** *For tre vilkårlige punkter gælder*

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}\,.$$

Bevis. Der gælder

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} &= 1\cdot Q - 1\cdot P + 1\cdot R - 1\cdot Q \\ &= 1\cdot R - 1\cdot P \\ &= \overrightarrow{PR}. \end{aligned}$$

□

Endvidere gælder at

$$-1 \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}.$$

Antag at $P = (x_1, y_2)$ og $Q = (x_2, y_2)$. Vi kan skrive de homogene koordinater for de tilsvarende massepunkter som

$$\begin{aligned} P \cdot 1 &= (x_1 : y_1 : 1)\ , \\ Q \cdot 1 &= (x_2 : y_2 : 1)\ . \end{aligned}$$

Herved bliver

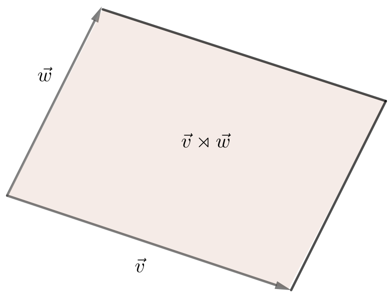
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (x_2 : y_2 : 1) - (x_1 : y_1 : 1) \\ &= (x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : 0)\,. \end{aligned}$$

Det vil sige at en vektor kan opfattes som et massepunkt, hvor den samlede masse er nul. Når man skriver koordinaterne for en vektor behøver man ikke at skrive det sidste nul. For at markere at der er tale om en vektor skriver man koordinaterne over hinanden.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

4 Planprodukt

Vi har set, at man kan gange en vektor med et tal. Et oplagt spørgsmål er, om man også kan gange to vektorer med hinanden. Svaret er ja, men hvad der kan forekomme forvirrende er, at der er flere måder at gøre det på. Vi vil starte med at definere det såkaldte planprodukt. Før vi kan definere planproduktet, er det nødvendigt at definere en orientering af planen. Sædvanligvis tegner man koordinatsystemer med 1.-aksen vandret og positive tal mod højre. 2.-aksen tegnes normalt lodret med positive tal opad. En rotation fra 1.-aksen til 2.-aksen vil vi regne positiv. Bemærk, at denne rotation går mod urets retning. I matematik regner man rotationer mod uret retning for positive og rotationer med uret for negative. Bemærk, at i navigation er det modsat - rotationer med uret regnes positive.



Hvis vektorerne $\vec{v}$ og $\vec{w}$ ikke er parallelle, så kan man også tale om orienteringen af parret $(\vec{v}, \vec{w})$. Orienteringen siges at være positiv, dersom den korteste rotation fra $\vec{v}$'s retning til $\vec{w}$'s retning er positiv. Ellers siges orienteringen af $(\vec{v}, \vec{w})$ at være negativ.

Definition 1. Lad $\vec{v}$ og $\vec{w}$ være vektorer. Hvis $(\vec{v}, \vec{w})$ er positivt orienteret, så defineres *planproduktet* fra $\vec{v}$ til $\vec{w}$ som

$$\vec{v} \rtimes \vec{w} = \text{arealet af det udspændte parallelogram.}$$

Hvis $(\vec{v}, \vec{w})$ er negativt orienteret, så defineres planproduktet fra $\vec{v}$ til $\vec{w}$ som

$$\vec{v} \rtimes \vec{w} = \text{minus arealet af det udspændte parallelogram.}$$

Hvis $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er parallelle, så defineres planproduktet fra $\vec{v}$ til $\vec{w}$ som

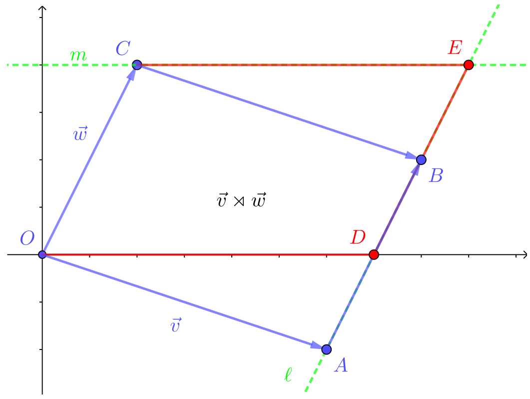
$$\vec{v} \rtimes \vec{w} = 0\,.$$

Planproduktet er således et areal regnet med fortegn. Grunden til at vi regner arealer med fortegn er, at vi på denne måde får et produkt, som opfylder nogle pæne regneregler. Dette ville ikke være tilfældet, hvis vi ikke regnede med fortegn.

Vi vil nu finde en formel til hurtigt at kunne beregne planprodukter.

Sætning 2. *Lad* $\vec{v} = \binom{a}{b}$ *og* $\vec{w} = \binom{c}{d}$*. Da kan planproduktet beregnes som*

$$\vec{v} \rtimes \vec{w} = ad - bc.$$



Bevis. Hvis begge vektorer er parallelle med x-aksen, så er planproduktet 0, hvilket også er det man får ved at sætte ind i formlen. Vi antager derfor at mindst en af vektorerne ikke er parallel med x-aksen. Vi vil her antage, at det er $\vec{w}$,som ikke er parallel med x-aksen.

På figuren er $\vec{v}$ og $\vec{w}$ afsat ud fra origo og udspænder parallelogrammet $OABC$. Vi tegner nu en linje ℓ gennem A og B og lader D betegne skæringspunktet med x-aksen. Endvidere lader vi E betegne skæringspunktet mellem ℓ og en linje m gennem C og parallel med x-aksen. Antag at punktet D har koordinater $(x, 0)$. Da findes et tal t så

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}\,,\\
\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB},\\
\overrightarrow{OD} &= \vec{v} + t \cdot \vec{w}\,,\\
\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dette kan skrives som

$$\begin{aligned}
x &= a + t \cdot c\,,\\
0 &= b + t \cdot d\,.
\end{aligned}$$

Derfor gælder

$$\begin{aligned}
\vec{v} \rtimes \vec{w} &= d \cdot x\\
&= d \cdot (a + t \cdot c)\\
&= d \cdot a + d \cdot t \cdot c\\
&= d \cdot a - b \cdot c.
\end{aligned}$$

□

Denne formel giver os nøglen til at beregne arelaer af palallelogrammer og diverse andre polygoner.

Eksempel 5. Vektorerne $\binom{1}{2}$ og $\binom{-2}{3}$ udspænder et parallelogram. Planproduktet er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 7.$$

Parallelogrammets areal er derfor 7.

Eksempel 6. Vektorerne $\binom{2}{1}$ og $\binom{2}{-3}$ udspænder et parallelogram. Planproduktet er

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = -8.$$

Planproduktet er negativt, hvilket afspejler at vektorerne er negativt orienterede. Arealet er 8.

Planproduktet er en slags areal regnet med fortegn. I stedet for at tale om „arealet af en figur regnet med fortegn", vil vi ofte blot sige „størrelsen af figuren". Planproduktet af vektorer minder produkt af tal, idet der gælder nogle tilsvarende regneregler.

Sætning 3. *For tre vilkårlige vektorer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ og en vilkårlig konstant k gælder følgende regneregler:*
1. $\vec{v} \rtimes \vec{w} = -\vec{w} \rtimes \vec{v}$ (anti-kommutativ lov).
2. $(k \cdot \vec{v}) \rtimes \vec{w} = k \cdot (\vec{v} \rtimes \vec{w})$.
3. $\vec{u} \rtimes (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \rtimes \vec{v} + \vec{u} \rtimes \vec{w}$ og $(\vec{u} + \vec{v}) \rtimes \vec{w} = \vec{u} \rtimes \vec{w} + \vec{u} \rtimes \vec{w}$ (distributive love).
4. $\vec{v} \rtimes \vec{w} = 0$ netop hvis er $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

Notation I dette afsnit bruger vi mest $\rtimes$ som notation for planproduktet, men der findes en lang række forskellige måder at skrive planprodukter. Den mest almindelige notation for planprodukt er at skrive $\det(\vec{v}, \vec{w})$ og kalde planproduktet for *determinanten* af $\vec{v}$ og $\vec{w}$. Hvis vektorerne er givet ved koordinaterne $\vec{v} = \binom{a}{b}$ og $\vec{w} = \binom{c}{d}$, så er det almindeligt at skrive determinanten som

$$\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ac - bd.$$

Historisk har vektorregning dels udviklet sig fra fysik og dels fra det systematiske studie af determinanter (i 2 eller flere dimensioner).

Hvis vi i stedet ønsker at beregne størrelsen af en trekant udspændt af to vektorer, så deler vi blot størrelsen af det tilsvarende parallelogram med 2.

Eksempel 7. Vektorerne $\binom{4}{-1}$ og $\binom{1}{3}$ udspænder en trekant. Planproduktet er

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 13.$$

Arealet af trekanten er derfor $\frac{1}{2} \cdot 13 = 6{}^1\!/\!_2$.

Størrelsen S af en vilkårlig trekant ABC kan beregnes som

$$S = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rtimes \overrightarrow{AC},$$

og vi bemærker at værdien af denne formel ikke ændrer sig hvis en trekant parallelforskydes.

Til beregning af størrelsen af en trekant ønsker vi at lave en formel hvor A,B, og C indgår symmetrisk i formlen. Det opnås ved følgende omskrivning.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \rtimes \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \rtimes \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OB} + 0\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \rtimes \overrightarrow{OA}. \end{aligned} \tag{1}$$

Denne formel siger, at størrelsen af en trekant kan fås ved at dele trekanten op i 3 trekanter ud fra origo og herefter lægge disse 3 arealer sammen. Dette er oplagt så længe origo ligger inde i trekanten (Fig. 2), men det gælder også selvom origo ligger uden for trekanten.

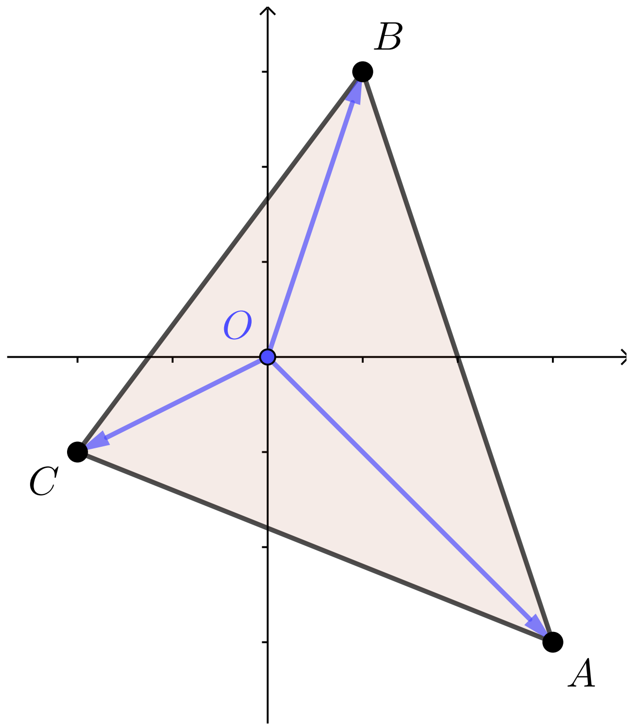
Sætning 4 (Snørrebåndsformlen)**.** *Lad $A_1 A_2 \ldots A_n$ betegne hjørnerne i en orienteret polygon. Da kan størrelsen af polygonen beregnes som*

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} \rtimes \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2} \rtimes \overrightarrow{OA_3} + \ldots \overrightarrow{OA_n} \rtimes \overrightarrow{OA_1}\right).$$

Bevis. Vi laver en triangulering af polygonen og udregner størrelsen af hver trekant i trianguleringen ved hjælp af formel (1). Hvi kanterne i to trekanter støder op til hinanden, så vil kanten mellem blive modsat orienteret og bidragene vil derfor gå ud med hinanden. Da alle indre kanter går ud med hinanden i summen, så kun bidragene fra de ydre kanter er tilbage. Polygonens størrelse kan derfor beregnes som

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1} \rtimes \overrightarrow{OA_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_2} \rtimes \overrightarrow{OA_3} + \ldots \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_n} \rtimes \overrightarrow{OA_1}$$

og snørrebåndsformlen opnås ved at sætte $^1\!/\!_2$ uden for parentes. $\square$



Figur 2: Indre triangulering af trekant.

Bemærkning 1. Da forskellige trianguleringer vil føre frem til snørrebåndsformlen, vil summen af størrelserne af trekanter i forskellige trianguleringer altid give sammen værdi, hvilket ikke er helt oplagt i betragtning af trekanterne kan have forskellig orientering og lappe ind over hinanden.

For en god ordens skyld bør man også checke om værdien af snørrebåndsformlen kunne ændrer sig, hvis man tilføjer ekstra punkter rundt langs kanterne for en polygon. Det er heldigvis ikke tilfældet som det fremgår af vores næste sætning, som siger at hvis en trekant deles op i 2 trekanter, så er størrelsen af den samlede trekant lig med summen af størrelserne af de 2 trekanter. Tre punkter siges at være *ko-lineære*, dersom de ligger på en ret linje. Man kan undersøge om 3 punkter er ko-lineære ved at udregne størrelsen af den udspændte trekant og checke om resultatet er 0.

Sætning 5 (Indskudsregel for trekanter)**.** *Lad A, B og C være ko-lineære punkter. Da gælder at*

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{AC}.$$

Bevis. Da punkterne er ko-lineære, gælder

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \rtimes \overrightarrow{OA} &= 0\,, \\
\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OC} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \rtimes \overrightarrow{OA}\,, \\
\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \rtimes \overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \rtimes \overrightarrow{OC}.
\end{aligned}$$

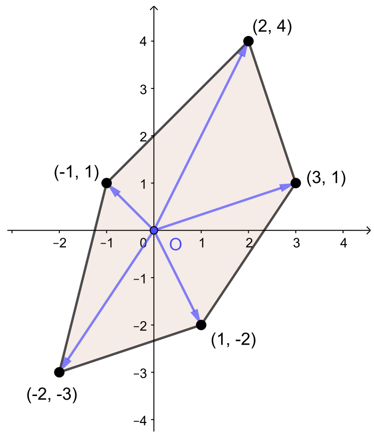
□

Eksempel 8. En femkant har hjørner (-1, 1), (-2, -3), (1, -2), (3, 1) og (2, 4). Arealet beregnes ved hjælp af vores snørrebåndsformlen.

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}(5+7+7+10+6) = \frac{35}{2}.$$

Arealet er derfor $^{35}/_{2} = 17^{1}/_{2}$.

Øvelse 1. Beregn arealet af en firkant med hjørnerne $(2, 1), (3, 2), (5, 6)$ og $(1, 9)$. Tegn firkanten ind i et koordinatsystem.



Figur 3: Polygon fra Eksempel 8.

5 Punkter og linjer

Hvis vi har to forskellige punkter med koordinater (x_1, y_1) og (x_2, y_2) så findes der netop en linje, som går gennem disse to punkter. Vi vil nu skrive en ligning og for denne linje. Lad (x, y) være et vilkårligt punkt. Da ligger (x, y) på linjen netop hvis de tre punkter (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x, y) er ko-lineære. Vi benytter nu at ko-lineære punkter udspænder en trekant med areal 0. Det vil sige, at der gælder, at

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x \\ y_2 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Som vi kan se indgår determinanter helt naturligt når vi skal finde ligningen for en linje.

Eksempel 9. Vi vil bestemme en ligning for en linje gennem punkterne med koordinater $(2, 5)$og $(5, 7)$. Vi opskriver derfor ligningen

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & x \\ 7 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 2 \\ y & 5 \end{vmatrix} &= 0, \\ 2 \cdot 7 - 5 \cdot 5 + 5y - 7x + 5x - 2y &= 0, \\ 3y - 2x - 11 &= 0. \end{aligned}$$

En ligning for en ret linje har formen

$$ax + by + c = 0.$$

Tallene a,b og c vil vi kalde *linjens homogene koordinater* og vi vil betegne linjen som $[a : b : c]$. Hvis vi placerer massen m i punktet (x, y) vil vi få et massepunkt med homogene koordinater $(xm : ym : m)$. Hvis vi ganger ligningen igennem med m får vi

$$axm + bym + cm = 0.$$

Det vil sige at hvis massepunktet med homogene koordinater $(x : y : z)$ ligger på linjen med homogene koordinater $[a : b : c]$ netop hvis

$$ax + by + cz = 0.$$

Sætning 6. *Lad der være givet to massepunkter med homogene koordinater* $(x_1 : y_1 : z_1)$ *og* $(x_2 : y_2 : z_2)$. *Hvis*

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$
$$b = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$$
$$c = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

så ligger massepunkterne på linjen med homogene koordinater $[a : b : c]$.

Bevis. Vi starter med at vise at massepunktet med koordinater $(x_1 : y_1 : z_1)$ ligger på linjen

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_1 \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, x_1 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, y_1 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, z_1 \\ &= y_1 z_2 x_1 - z_1 y_2 x_1 + z_1 x_2 y_1 - x_1 z_2 y_1 + x_1 y_2 z_1 - y_1 x_2 z_1 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

At massepunktet med homogene koordinater $(x_2 : y_2 : z_2)$ også ligger på linjen, vises på samme måde. □

Eksempel 10. Vi vil bestemme en ligning for linjen gennem punkterne $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ og $\left(2, \frac{2}{3}\right)$. for at undgå at skulle regne med brøker lægger massen 2 i det første punkt og massen 3 i det andet punkt hvorved massepunkterne får homogene koordinater $(1 : 8 : 2)$ og $(6 : 2 : 3)$. Koefficienterne i ligningen kan nu udregnes.

$$\begin{aligned} a &= \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 20 \\ b &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \\ c &= \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -46 \end{aligned}$$

Linjen har derfor homogene koordinater $[20 : 9 : -46]$, så en ligning for linjen gennem punkterne kan skrives som

$$20x + 9y - 46 = 0.$$

Der er mange andre måder hvorpå man kan skrive ligningen såsom

$$20x + 9y = 46$$

eller

$$y = -\frac{20}{9}x + 46.$$

Hvis man i stedet for at bestemme en linje gennem 2 punkter skal bestemme skæringspunktet mellem 2 linjer, så foregår det på samme måde.

Sætning 7. *Antag at linjerne ℓ_2 og ℓ_2 har homogene koordinater $[a_1 : b_1 : c_1]$ og $[a_2 : b_2 : c_2]$. Så vil massepunktet med homogene koordinater givet ved*

$$\begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ y &= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\ z &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ligge på begge linjer.

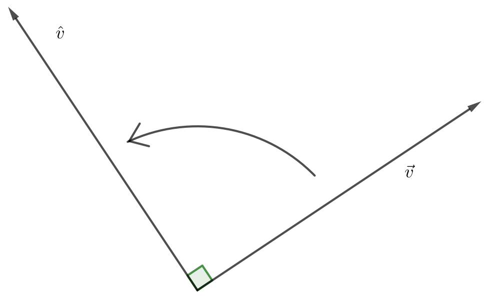
Bevis. Vi vil vise at det angivne massepunkt ligger på den første linje så vi udregner

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 (b_1 c_2 - c_1 b_2) + b_1 (c_1 a_2 - a_1 c_2) + c_1 (a_1 b_2 - b_1 a_2) \\ &= a_1 b_1 c_2 - a_1 c_1 b_2 + b_1 c_1 a_2 - b_1 a_1 c_2 + c_1 a_1 b_2 - c_1 b_1 a_2 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

At $(x : y : z)$ ligger på den anden linje vises på samme måde. □

Eksempel 11. Vi vil bestemme skæringspunktet mellem linjerne med ligninger

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= \frac{8}{3} \\ 5x + 2y &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$



Figur 4: Tværvektor.

For at undgå brøkrening ganger vi ligningerne igennem med henholdsvis 3 og 2 så vi får

$$\begin{aligned} 6x + 9y &= 8 \\ 10x + 4y &= 7 \end{aligned}$$

Alle led samles på venstre side, hvilket giver

$$\begin{aligned} 6x + 9y &= 8 \\ 10x + 4y &= 7 \end{aligned}$$

Linjerne har således homogene koordinater $[6 : 9 : -8]$ og $[10 : 4 : -7]$. Vi beregner de homogene koordinater for at massepunkt på begge linjer.

$$\begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -8 & -7 \end{vmatrix} = -31 \\ y &= \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = -38 \\ z &= \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -12 \end{aligned}$$

Massepunktet har dermed homogene koordinater $(-31 : -38 : -12)$, hvilket svarer til massen -12 placeret i punktet $\left(\frac{-31}{-12}, \frac{-38}{-12}\right) = \left(\frac{31}{12}, \frac{19}{6}\right)$. Skæringspunktet mellem linjerne har således koordinater $\left(\frac{31}{12}, \frac{19}{6}\right)$.

6 Tværvektor

Som vi har set, kan man bruge planproduktet til at undersøge om vektorer er parallelle. Vi ønsker nu at bruge planproduktet til at undersøge om to vektorer er *vinkelrette* eller *ortogonale*, som det også hedder. Til det formål indfører vi begrebet tværvektor.

Definition 2. Lad $\vec{v}$ være en vektor. Da er *tværvektoren* til $\vec{v}$ den vektor, som fås ved a dreje $\vec{v}$ en kvart tørn ($= 90°$) i positiv omløbsretning. Tværvektoren til $\vec{v}$ betegnes $\hat{\vec{v}}$ eller blot $\hat{v}$.

I stedet for at sige „tværvektoren til $\vec{v}$" er det almindeligt blot at sige „v-hat", idet $\vec{v}$ har fået en 'hat' på.

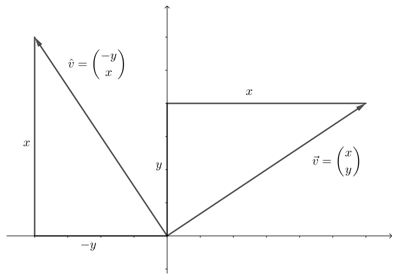
Sætning 8. *Lad $\vec{v}$ og $\vec{w}$være vektorer. Da er $\vec{v}$ og $\vec{w}$ ortogonale, netop hvis*

$$\vec{v} \rtimes \hat{\vec{w}} = 0$$

Bevis. Dette følger af at $\vec{v} \perp \vec{w}$ netop hvis $\vec{v} \parallel \hat{\vec{w}}$. □

Sætning 9. *Hvis $\vec{v} = \binom{x}{y}$, så gælder $\hat{\vec{v}} = \binom{-y}{x}$.*

Bevis. Hvis man tegner en retvinklet trekant som på figur 5, så vil en rotation af vektoren give en rotation af den viste trekant hvorved 1.-koordinaten x bliver 2.-koordinat, og 2.-koordinaten y skifter fortegn og bliver 1.-koordinat. Fortegnsskiftet skyldes, at vektoren drejer fra 1. kvadrant over i 2. kvadrant eller fra 2. over i 3. eller fra 3 over i 4. eller fra 4. over i 1. kvadrant. □



Figur 5: Vektor og tværvektor i koordinatsystem.

Eksempel 12. Vi vil undersøge om $\vec{v} = \binom{3}{4}$ står vinkelret på $\vec{w} = \binom{-8}{6}$. Vi drejer derfor $\vec{w}$ en kvart tørn og får $\hat{\vec{w}} = \binom{\text{-}6}{\text{-}8}$. Planproduktet af $\vec{v}$ og $\hat{\vec{w}}$ er

$$\begin{aligned}\vec{v} \rtimes \hat{\vec{w}} &= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix}\text{-}6\\\text{-}8\end{pmatrix}\\ &= 3 \cdot (\text{-}8) - 4 \cdot (\text{-}6)\\ &= \text{-}24 + 24\\ &= 0.\end{aligned}$$

Vektorerne er derfor vinkelrette.

Størrelsen $\vec{v} \rtimes \hat{\vec{w}}$ indgår i mange beregninger, så før vi går videre vil vi indføre lidt mere notation.

7 Prikprodukt

Definition 3. Ved *prikproduktet* (eller *skalarproduktet*) af vektorerne $\vec{v}$ og $\vec{w}$ forstås et tal som betegnes $\vec{v} \cdot \vec{w}$ og som udregnes vedv

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \rtimes \hat{\vec{w}}\,.$$

Sætning 10. *Prikproduktet kan beregnes ved*

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2\,.$$

Bevis. Beviset består i følgende beregning.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \rtimes \widehat{\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}}\\ &= \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix}\text{-}y_2\\x_1\end{pmatrix}\\ &= x_1x_2 - y_1\,(\text{-}y_2)\\ &= x_1x_2 + y_1y_2\,.\end{aligned}$$

□

Ligesom planproduktets fortegn er bestemt af vektorernes omløbsretning, så er prikproduktets fortegn bestemt af vinklen mellem de to vektorer. Der gælder

Hvis $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ er spids, så er $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$.

Hvis $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ er ret, så er $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Hvis $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ er stump, så er $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$.

Sætning 11. *Prikproduktet opfylder følgende regneregler.*

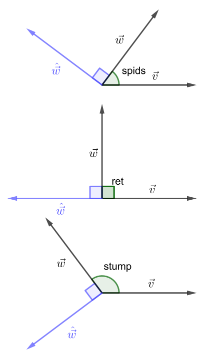
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ *(kommutativ lov)*

$(t \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = t \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$.

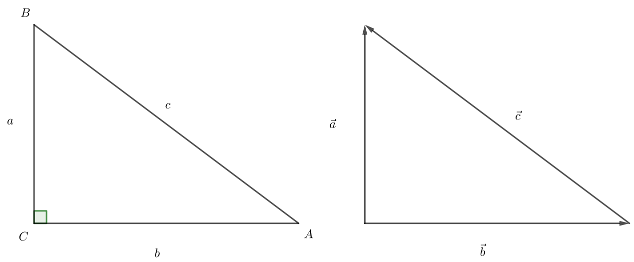
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ *(distributiv lov)*

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ *netop hvis* $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Bevis. Beviserne for disse regneregler står i bogen. □



Figur 6: Beliggenhed af $\vec{w}$ og $\hat{\vec{w}}$ for forskellige vinkler.



Figur 7: Retvinklet trekant og tilhørende vektorer.

8 Pythagoras og vektorers længde

Prikproduktet er nært beslægten med begreberne længde og afstand.

Sætning 12 (Længdeformlen)**.** *Lad* $\vec{v} = \binom{x}{y}$. *Da er længden af* $\vec{v}$ *bestemt ved*

$$|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2.$$

Bevis. Der gælder $\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v} \rtimes \hat{\vec{v}}$. Da $\vec{v}$ og $\hat{\vec{v}}$ udspænder et kvadrat med sidelængden $|\vec{v}|$, gælder der at

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x \cdot x + y \cdot y \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

□

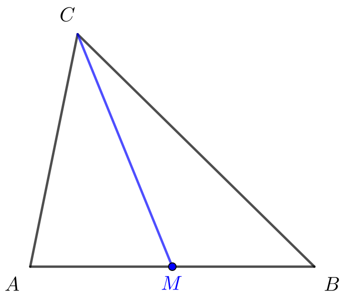
Af bevises ses at en vektor prikket med sig selv er det samme som længden i anden. Denne størrelse vil vi kalde kvadransen af vektoren. For punkter $P = (x_1, y_1)$ og $Q = (x_2, y_2)$ har vektoren $\overrightarrow{PQ}$ koordianter $\binom{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$. Hvis vi anvender længdeformlen på denne vektor, får vi afstandsformlen

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

I mange lærebøger bruger man Pythagoras læresætning til at bevise længdeformlen, men vi har vist den uden hjælp fra Pythagoras. Det er faktisk endnu bedre, idet vi nu er i stand til at give et ganske simpelt bevis for Pythagors læresætning.

Sætning 13. *Lad* A, B *og* C *betegne hjørnerne i en trekant, hvor* $\angle C$ *er ret. Lad* a *og* b *betegne længderne af kateterne og lad* c *betegne længden af hypotenusen. Da gælder*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Figur 8: Trekanten i Eksempel 13.

Bevis. Vi indfører vektorer

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{CB}\,,\\ \vec{b} &= \overrightarrow{CA}\,,\\ \vec{c} &= \overrightarrow{AB}\,,\end{aligned}$$

således at $a = |\vec{a}|$, $b = \left|\vec{b}\right|$ og $c = |\vec{c}|$. Da gælder $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ og dermed

$$\begin{aligned}c^2 &= \vec{c} \cdot \vec{c}\\ &= \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}\\ &= a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}\,.\end{aligned}$$

Da trekanten er retvinklet, er $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. □

Forskellige varianter af nedenstående sætning anvendes i statistik, fysik og geometri, men vigtigheden af sætningen i sin fulde generalitet blev først erkendt af Bregman i 1968.

Sætning 14 (Bregmans ligning)**.** *Antag at* $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$, *og lad* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *være punkter med tyngdepunkt* $T = m_1 \cdot P_1 + m_2 \cdot P_2 + \cdots + m_n \cdot P_n$. *Da gælder at*

$$m_1 \cdot \overrightarrow{PP_1}^2 + m_2 \cdot \overrightarrow{PP_2}^2 + \cdots + m_n \cdot \overrightarrow{PP_n}^2 = \overrightarrow{PT}^2 + m_1 \cdot \overrightarrow{TP_1}^2 + m_2 \cdot \overrightarrow{TP_2}^2 + \cdots + m_n \cdot \overrightarrow{TP_n}^2.$$

Eksempel 13 (Apollonius' sætning)**.** Lad M betegne midtpunktet af linjestykket AB i en trekant ABC. Da gælder at

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2 &= \overrightarrow{CM}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}^2\\ &= \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{MA}^2.\end{aligned}$$

Derfor kan man beregne længden af medianen $\overrightarrow{CM}$ ud fra ligningen

$$\overrightarrow{CM}^2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{MA}^2.$$

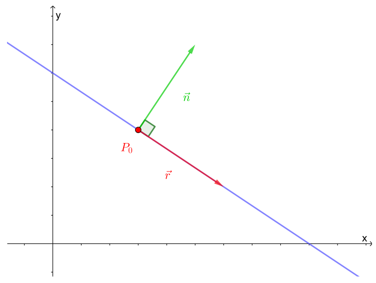
Hvis en trekant ABC har sidelængder

$$\begin{aligned}|AB| &= 6\\ |AC| &= 5\\ |BC| &= 7\end{aligned}$$

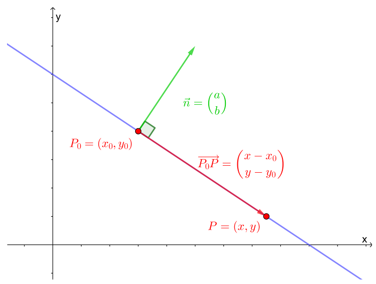
så er $|AM| = 3$, og længden af medianen CM er givet ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}^2 &= \frac{1}{2} \cdot 7^2 + \frac{1}{2} \cdot 5^2 - 3^2\\ &= \frac{49}{2} + \frac{25}{2} - 9\\ &= 28.\end{aligned}$$

Derfor er $|CM| = 28^{1/2} \approx 5.29$.



Figur 9: Tværvektoren til en retningsvektor $\vec{r}$ er en normalvektor $\vec{n}$.



Figur 10: En retningsvektor og en normalvektor, som står vinkelret på hinanden.

Øvelse 2. Beregn længderne af de øvrige medianer i trekant ABC fra Eksempel 13.

Som konsekvens af Bregmans ligning får vi følgende *korolar* (korollar betyder følgesætning).

Korollar 1 (Bregmans ulighed)**.** *Antag at $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1$ og lad $P_1, P_2, \ldots, P_n$ være punkter med tyngdepunkt $T = m_1 \cdot P_1 + m_2 \cdot P_2 + \cdots + m_n \cdot P_n$. Da gælder for et vilkårligt punkt P, at*

$$m_1 \cdot \overrightarrow{PP_1}^2 + m_2 \cdot \overrightarrow{PP_2}^2 + \cdots + m_n \cdot \overrightarrow{PP_n}^2 \geq m_1 \cdot \overrightarrow{TP_1}^2 + m_2 \cdot \overrightarrow{TP_2}^2 + \cdots + m_n \cdot \overrightarrow{TP_n}^2$$

med lighedstegn netop når $P = T$.

Ifølge Bregmans ulighed er tyngdepunktet det punkt, der minimerer den gennemsnitlige kvadrans.

9 Normalvektorer

Vi har set hvordan man kan beregne ligningen for en linje gennem 2 punkter. Hvis man forbinder to punkter på en linje med en vektor, får man en vektor i linjens retning. Dette kaldes en retningsvektor. En linje er bestemt ud fra et punkt og en retningsvektor. I stedet for at bestemme en linje ud fra et punkt og en retningsvektor kan man bestemme en linje ud fra et punkt og en såkaldt normalvektor.

Definition 4. Ved *en retningsvektor* for en linje forstås en vektor i linjens retning. Ved *en normalvektor* forstås en vektor vinkelret på linjen.

Man kan skifte mellem retningsvektor og normalvektor ved hjælp af vores tværvektor-operation.

Sætning 15. *Lad $P_0 = (x_0, y_0)$ være et punkt og lad $\vec{n} = \binom{a}{b}$ være en egentlig vektor. Da har linjen gennem P_0 med $\vec{n}$ som normalvektor ligning*

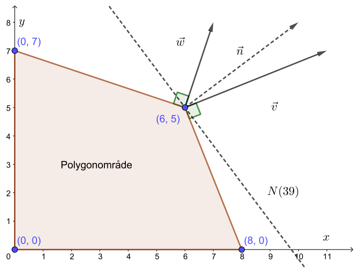
$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0.$$

Bevis. Lad $P = (x, y)$ være et vilkårligt punkt som illustreret på Figur 10

Da ligger P på linjen netop hvis $\overrightarrow{P_0P}$ er vinkelret på $\vec{n}$. Det kan vi skrive som

$$\begin{aligned} \vec{n} &\perp \overrightarrow{P_0P} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} &= 0 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} &= 0 \\ a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

□



Figur 11: Følsomhedsanalyse.

Vi skal se hvordan vektorregning kan hjælpe os med at lave en følsomhedsanalyse i lineær optimering.

Eksempel 14. Betragt et lineært optimeringsproblem, hvor polygonområdet er givet ved

$$\begin{aligned} 5x+2y &\leq 40, \\ x+3y &\leq 21, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Dette giver 4 linjer, som afgrænser et polygonområde. De første 2 linjer har normalvektorer med koordinaterne og $\vec{v}=\binom{5}{2}$ og $\vec{w}=\binom{1}{3}$. Det afgrænsede polygonområde har hjørnerne $(0,0)$, $(8,0)$, $(6,5)$ og $(0,7)$. Lad kriteriefunktionen f være givet ved $f(x,y)=4x+3y$. Denne funktion har niveaukurver med normalvektor $\vec{n}=\binom{4}{3}$. Af figures ses tydeligt, at maksimumsstedet er punktet $(6,5)$. Læg mærke til at $(\vec{v},\vec{n})$ er positivt orienteret og at $(\vec{n},\vec{w})$ er positivt orienteret.

Vi vil nu lave en følsomhedsanalyse. Betragt en kriteriefunktion af formen $f(x,y)=ax+3y$. Denne kriteriefunktion har normalvektor $\vec{n}=\binom{a}{3}$. Vi vil undersøger i hvilket interval a kan variere uden at maksimumsstedet $(6,5)$ ændrer sig. Da skal vektorerne $(\vec{v},\vec{n})$ skal være positivt orienteret eller parallelle. Det betyder at planproduktet (determinanten) skal være mindst nul.

$$\begin{aligned} \vec{v} \rtimes \vec{n} &\geq 0, \\ \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix}a\\3\end{pmatrix} &\geq 0, \\ 5\cdot 3-2\cdot a &\geq 0 \\ 15 &\geq 2a \\ a &\leq {}^{15}\!/_{2} \end{aligned}$$

Tilsvarende skal vektorerne $(\vec{n},\vec{w})$ være positivt orienteret eller parallelle.

$$\begin{aligned} \vec{n} \rtimes \vec{w} &\geq 0 \\ \begin{pmatrix}a\\3\end{pmatrix} \rtimes \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} &\geq 0 \\ a\cdot 3-3\cdot 1 &\geq 0 \\ 3a &\geq 3 \\ a &\geq 1. \end{aligned}$$

Disse uligheder kan sammenfattes til $a \in [1; {}^{15}\!/_{2}]$, hvilket er resultatet af vore følsomhedsanalyse.