Polynomier og Horners skema

Peter Harremoës

6. juli 2019

1 Beregning af funktionsværdier

Kineserne udviklede „det himmelske elements metode“, som blandt andet kan bruges som en effektiv metode til beregning af funktionsværdier. Metoden blev fint beskrevet af Qín Jiǔsháo (ca. 1202-1261), men har været kendt tidligere. Metoden blev siden genopdaget flere gange - sidst af William George Horner (1786-1837), som populariserede en måde at skrive beregningerne op på, som siden har gået under navnet *Horners skema*. For at forstå metoden vil vi tage udgangspunkt i et eksempel.

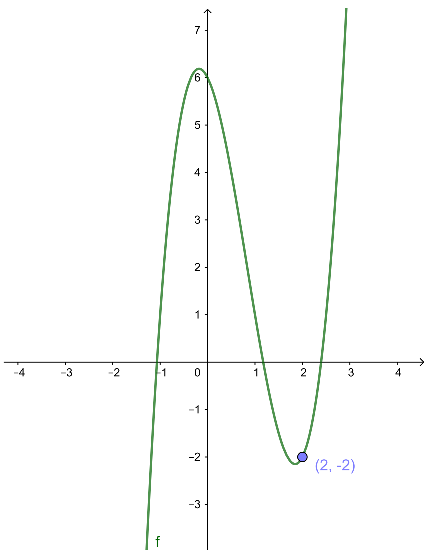
Lad $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 6$. Vi ønsker at beregne $f(2)$ så vi skal sætte $x = 2$ ind i beregningsudtrykket, men først laver vi følgende omskrivning.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 5x^2 - 2x + 6 \\ &= \left(2x^2 - 5x - 2\right) x + 6 \\ &= ((2x - 5)\, x - 2)\, x + 6\,. \end{aligned}$$

Det giver

$$\begin{aligned} f(2) &= ((2 \cdot 2 - 5) \cdot 2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= ((4 - 5) \cdot 2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= ((\text{-}1) \cdot 2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= (\text{-}2 - 2) \cdot 2 + 6 \\ &= (\text{-}4) \cdot 2 + 6 \\ &= \text{-}8 + 6 \\ &= \text{-}2\,. \end{aligned}$$

I disse beregninger har vi skiftevis ganget og lagt til/trukket fra.



Disse beregninger kan bekvemt skrives op i det, som kaldes *Horners skema*. Først skriver vi koefficienterne til polynomiet f i første række og skriver 0 under den første koefficient.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & & & \\ \hline x=2 & & & & \end{array}$$

Vi lægger 2 og 0 sammen og skriver summen i nederste række.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & & & \\ \hline x=2 & 2 & & & \end{array}$$

Herefter ganger vi 2-tallet i nederste række med 2 og skriver produktet i 2. række.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & 4 & & \\ \hline x=2 & 2 & & & \end{array}$$

Vi lægger -5 og 4 sammen og skriver summen i nederste række.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & 4 & & \\ \hline x=2 & 2 & -1 & & \end{array}$$

Nu ganges -1 med 2 og produktet skrives i 2. række.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & 4 & -2 & \\ \hline x=2 & 2 & -1 & & \end{array}$$

Summen af -2 og -2 er -4, som skrives i nederste række.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & 4 & -2 & \\ \hline x=2 & 2 & -1 & -4 & \end{array}$$

Så ganges -4 med 2 og produktet skrives i 2. række.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & 4 & -2 & -8 \\ \hline x=2 & 2 & -1 & -4 & \end{array}$$

Endelig lægges 6 og -8 sammen, hvilket giver -2, som skrives i den nederste række. Herved er funktionsværdien $f(2)$ beregnet, og resultatet står adskilt fra de øvrige tal i nederste række.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & -2 & 6 \\ & 0 & 4 & -2 & -8 \\ \hline x=2 & 2 & -1 & -4 & -2 \end{array}$$

Vi tager et eksempel mere.

Eksempel 1. Lad $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6$. Vi ønsker at beregne $f(2)$ så vi skal sætte $x = 2$ ind i beregningsudtrykket, men først laver vi følgende omskrivning.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6 \\ &= \left(3x^2 - 7x + 7\right)x - 6 \\ &= ((3x-7)x+7)x - 6. \end{aligned}$$

Det giver

$$\begin{aligned} f(2) &= ((3\cdot 2 - 7)\cdot 2 + 7)\cdot 2 - 6 \\ &= ((6-7)\cdot 2 + 7)\cdot 2 - 6 \\ &= ((\text{-}1)\cdot 2 + 7)\cdot 2 - 6 \\ &= (\text{-}2 + 7)\cdot 2 - 6 \\ &= 5\cdot 2 - 6 \\ &= 10 - 6 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Ved hjælp af Horners skema kan disse beregninger skrives op som følger.

	3	-7	7	-6
	0	6	-2	10
$x=2$	3	-1	5	$\boxed{4}$

Øvelse 1. Brug Horners skema til at lave et sildeben for funktionen $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

Brug sildebenet til at lave en skitse af grafen for f.

2 $^p/_q$-metoden

Denne metode kan benyttes til at bestemme de af et polynomiums rødder, som er rationelle tal.

Sætning 1. *Antag, at $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, hvor koefficienterne $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ og a_0 alle er hele tal. Antag endvidere at hverken a_n eller a_0 er nul. Hvis det rationelle tal $x = {}^p/_q$ er rod i $f(x)$, og brøken $^p/_q$ er uforkortelig, så går p op i a_0 og q går op i a_n.*

Bevis. Antag at $x = {}^p/_q$ er rod i $f(x)$. Da gælder, at

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 &= 0 \\ a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Denne ligning ganges igennem med q^n, hvilket giver

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Da p går op i alle de første led, må p også gå op i det første led $a_0 q^n$. Da brøken $^p/_q$ er uforkortelig, har p og q ingen fælles faktorer. Derfor må p gå op i a_0. At q går op i a_0 vises på samme måde. □

Eksempel 2. Vi ønsker at finde eventuelle rationelle løsninger til ligningen $x^3 - 5x^2 + 5x + 2 = 0$. Hvis $x = {}^p/_q$ er en uforkortelig brøk, som er løsning til ligningen, så går tælleren p op i 2, hvilket betyder at $p \in \{\text{-}2, \text{-}1, 1, 2\}$. Tilsvarende går nævneren q op i 1, som er koefficienten til x^3, så $q \in \{\text{-}1, 1\}$. Det giver følgende mulige rationelle løsninger til ligningen $x \in \{\text{-}2, \text{-}1, 1, 2\}$. Vi udregner funktionsværdierne for disse værdier af x, hvilket giver

$$\begin{aligned} f(\text{-}2) &= \text{-}36 \\ f(\text{-}1) &= \text{-}9 \\ f(1) &= 3 \\ f(2) &= 0. \end{aligned}$$

Som det ses, er $x = 2$ den eneste rationelle rod i polynomiet.

Eksempel 3. Vi ønsker at bestemme eventuelle rationelle løsninger til ligningen $x^2 = 2$. Ligningen omskrives til $x^2 - 2 = 0$, så hvis $x = {}^p/_q$ er uforkortelig, så skal p gå op i -2 og q skal gå op i 1. De mulige rationelle løsninger er derfor -2,-1,1 og 2. Ingen af disse tal er dog løsninger, så ligningen har ingen rationelle løsninger. Normalt vil vi sige, at ligningen $x^2 = 2$ har løsningerne $x = \pm 2^{1/2}$, så vi har fået vist, at $2^{1/2}$ ikke kan skrives som en brøk. Derfor siger vi, at $2^{1/2}$ er et irrationelt tal.

3 Polynomiers division

Paolo Ruffini (1765-1822) opdagede, at det himmelske elements metode (som også han genopfandt) kan bruges til effektivt at lave *polynomiers division*. Vi vil igen tage udgangspunkt i et eksempel.

Eksempel 4. I Eksempel 1 så vi, at det sidste 4-tal i udregningen var polynomiets værdi for $x = 2$. Nu vil vi give en forklaring på de øvrige tal i nederste linje. Først danner vi et polynomium $q(x) = 3x^2 - x + 5$. Vi påstår at det oprindelige polynomium $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x-2) \cdot q(x) + 4$. Da vi konstruerede Horners skema, udregnede vi den nederste række ved at lægge de to øverste rækker sammen. Derfor kan vi udregne den øverste række ved at trække den midterste række fra den nederste. Den nederste række er $x \cdot q(x) + 4$ og den midterste række er $2 \cdot q(x)$. Derfor er

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \cdot q(x) + 4) - 2 \cdot g(x) \\ &= (x \cdot q(x) - 2 \cdot g(x)) + 4 \\ &= (x-2) \cdot q(x) + 4. \end{aligned}$$

I ligningen $f(x) = (x-2)\,q(x) + 4$ kan vi dividere igennem med $x - 2$ og får

$$\frac{f(x)}{x-2} = q(x) + \frac{4}{x-2}.$$

Generelt gælder følgende sætning.

Sætning 2 (Bézouts lille sætning)**.** *Hvis $f(x)$ er et polynomium og x_0 er et reelt tal, så findes et polynomium $q(x)$, så*

$$f(x) = q(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Polynomiet $q(x)$ kaldes *kvotienten,* og tallet $f(r)$ kaldes *resten* ved division af *dividenden* $f(x)$ med $x - x_0$ som *divisor.* Læg mærke til, at kvotienten $q(x)$ er et polynomium, hvis grad er 1 lavere end graden af $f(x)$. Hvis resten er nul, siger vi at divisionen af $f(x)$ med $x - x_0$ *går op.* Da resten er lig med funktionsværdien $f(x_0)$, ser vi at divisionen går op netop hvis $f(x_0) = 0$. Med denne terminologi kan vi formulere følgende vigtige sætning.

Sætning 3 (Faktoriseringssætningen)**.** *Lad $f(x)$ være et polynomium og lad x_0 være et reelt tal. Divisionen af $f(x)$ med $x - x_0$ går op, netop hvis x_0 er rod i polynomiet.*

At finde rødder i et polynomium og at faktorisere et polynomium er dermed to sider af samme sag.

Eksempel 5. Vi vil gerne finde rødderne i polynomiet $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 12$. Ved hjælp af p/q-metoden prøver vi med forskellige tal, som går op i 12. Hvis vi forsøger med $x = 2$ får vi

	1	-3	-2	2	12
$x = 2$	0	2	-2	-8	-12
	1	-1	-4	-6	$\boxed{0}$

Vi ser således at $x = 2$ er rod, og at vi har faktoriseringen $f(x) = \left(x^3 - x^2 - 4x - 6\right) \cdot (x-2)$. Ved at benytte nulreglen får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \left(x^3 - x^2 - 4x - 6\right) \cdot (x-2) &= 0 \\ x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0 &\vee x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Trediegradsligningen $x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0$ kan vi prøve at finde løsninger til ved hjælp af p/q-metoden, så vi prøver med forskellige tal, der går op i 6. Hvis vi forsøger med $x = 3$ får vi

	1	-1	-4	-6
$x = 3$	0	3	6	6
	1	2	2	$\boxed{0}$

Det giver faktoriseringen $x^3 - x^2 - 4x - 6 = \left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot (x-3)$. Ved at benytte nulreglen igen får vi

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 4x - 6 &= 0 \\ \left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot (x-3) &= 0 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 &\vee x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Andengradsligningen $x^2 + 2x + 2 = 0$ har diskriminant $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, så 2.-gradsligningen har ingen rødder og 2.-gradspolynomiet $x^2 + 2x + 2$ kan ikke faktoriseres. Vi har således lavet følgende faktorisering af det oprindelige polynomium

$$f(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot (x-3) \cdot (x-2)$$

svarende til at 4.-gradspolynomiet f har rødderne $x = 2$ og $x = 3$.

Hvis et n'te-gradspolynomium f har rødderne $r_1, r_2, \ldots, r_k$ kan f skrives som

$$f(x) = q(x) \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_k)$$

hvor q er et polynomium af grad $n - k$.

Sætning 4. *Et n'te-gradsligning har højst n løsninger.*

Bevis. Hvis $f(x)$ er et n'te-gradspolynomium og r er en rod så kan $f(x)$ skrives på formen $f(x) = q(x) \cdot (x - x_0)$. så kan vi lave omskrivningerne

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ q(x) \cdot (x - x_0) &= 0 \\ q(x) = 0 \quad &\vee \quad x - x_0 = 0 \\ q(x) = 0 \quad &\vee \quad x = x_0\,. \end{aligned}$$

Derfor vil enhver rod i $f(x)$ være lig med r eller være rod i $(n-1)$'te-gradspolynomiet $q(x)$. Graden af ligningen vil derfor formindskes hver gang vi finder en rod. Hvis vi har fundet n rødder, vil graden af polynomiet være bragt ned på nul, og det vil ikke være muligt at finde yderligere rødder. □

4 Fortegn og multiple rødder

Begreberne positiv og negativ bruges i nogle lidt afvigende betydninger på forskellige sprog. Forskellige matematikere, som iøvrigt taler samme sprog, bruger også somme tider disse begreber lidt forskelligt.

I forhold til det vi skal lave, er det hensigtsmæssigt at følge nedenstående definition.

Definition 1. Et tal $x \in \mathbb{R}$ siges at være *positivt* dersom $x \geq 0$. Tallet x siges at være *strengt positivt* dersom $x > 0$. Tilsvarende siges x at være *negativt* dersom $x \leq 0$, og x siges at være *strengt negativt* dersom $x < 0$.

Bemærkning 1. I Danmark er det mest udbredt at sige at tallet nul hverken er positivt eller negativt, men med vores terminologi er 0 både positivt og negativt.

Sætning 5 (Mellemværdisætningen)**.** *Lad f være et polynomium og lad $a < b$ være to reelle tal. Antag at tallet y ligger mellem tallene $f(a)$ og $f(b)$. Da findes et reelt tal $x \in [a; b]$ så $f(x) = y$.*

Denne sætning gælder ikke kun for polynomier men for alle kontinuerte funktioner, hvilket løst sagt vil sige funktioner, hvis graf er sammenhængende og dermed ikke har nogle spring. At der findes et reelt tal $x \in [a; b]$ så $f(x) = y$ betyder ikke at der findes en formel til at udregne værdien af x. Det betyder blot, at man kan bestemme decimal tal $x \in [a; b]$, så $f(x) \approx 0$, og at man kan opnå vilkårlig stor nøjagtighed. Hvis et polynomium ikke har rationelle rødder, vil man normalt beregne rødderne ved hjælp af et CAS-program.

Eksempel 6. Som bekendt er $1^2 = 1 < 2$ og $2^2 = 4 > 2$. Ifølge mellemværdisætningen har ligningen $x^2 = 2$ derfor en løsning, og løsningen er det reelle tal man kalder kvadratroden af 2. Hvis vi ønsker første decimal korrekt, kan vi lave et sildeben med funktionsværdier.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
x^2	1.00	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25	2.56	2.89	3.24	3.61	4.00

Vi kan se $x = 1.4$ er lidt for småt, og $x = 1.5$ er for stort. Nu ved vi at løsningen starter med 1.4 og vi kan tilføje næste decimal på samme måde. Med 5 decimaler gælder, at $2^{1/2} \approx 1.41421$. Hvis vi opløfter 1.41421 i anden, får vi

$$1.41421^2 = 1.9999899241$$

Til de fleste praktiske gøremål dette antal decimaler være fuldt ud tilstrækkelig i forhold til præcision. Endnu større præcision kan også lade sig gøre, og det gælder uanset hvilken præcision man måtte ønske sig. I mange af de opgaver, vi vil regne for at træne teorien er tallene valgt så man kan gætte rødderne ved p/q-dele metoden. I praktiske opgaver vil koefficienterne ofte kun være tilnærmnede værdier givet som decimaltal. I disse tilfælde

En vigtig konsekvens af mellemværdisætningen er følgende resultat.

Sætning 6. *Hvis den kontinuerte funktion f er defineret på et interval, og f har minimum* $\min(f)$ *og maksimum* $\max(f)$*, så er værdimængden givet ved* $Vm(f) = [\min(f); \max(f)]$.

Et vigtigt tilfælde af mellemværdisætningen er situationen, hvor $f(a)$ og $f(b)$ har forkellige fortegn. Da siger sætningen, at f har en rod mellem a og b. Det betyder omvendt, at hvis f ikke har rødder i intervallet $]a;b[$, så har f konstant fortegn i intervallet $]a;b[$. I den situation kan man undersøge fortegnet for f i intervallet ved at bestemme fortegnet for en tilfældig valgt x-værdi i intervallet. Funktionen vil have samme fortegn for alle andre x-værdier i intervallet.

Sætning 7. *Et polynomium af ulige grad har mindst en rod.*

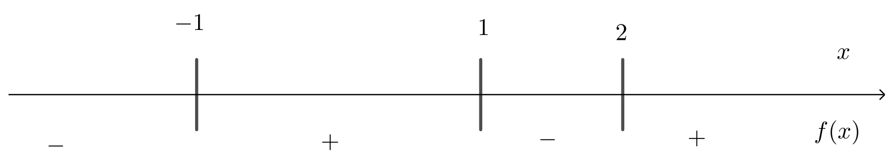
Bevis. Antag $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. For $x \neq 0$ kan vi lave omskrivningen

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) . \end{aligned}$$

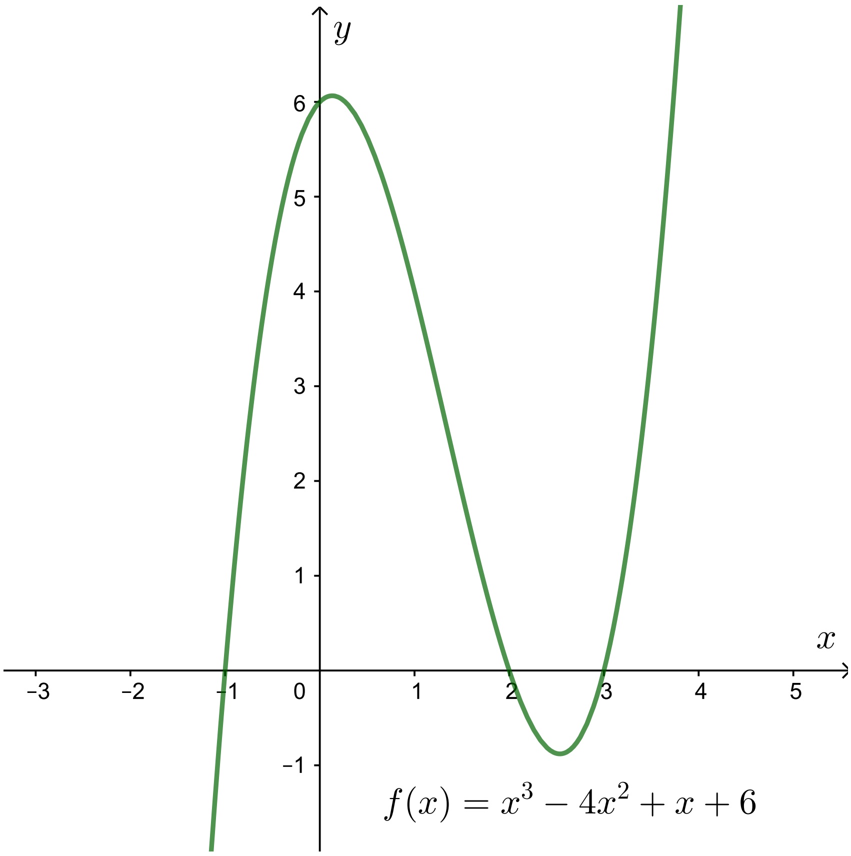
Hvis x har en stor positiv eller stor negativ værdi, vil $1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$ være tæt på 1 og dermed være positiv. For store positive eller negative værdier af x vil fortegnet for $f(x)$ derfor være det samme som fortegnet for $a_n x^n$. Da n er ulige skifter $a_n x^n$ fortegn når x skifter fortegn. Derfor har $f(x)$ forskelligt fortegn for store positive værdier af x og for store negative værdier af x. Da funktionen skifter fortegn, har den ifølge mellemværdisætningen mindst en rod. □

Med de resultater vi har opnået, kan vi lave en fortegnsundersøgelse for en funktion.

Eksempel 7. Vi vil undersøge funktionen $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ for nulpunkter og fortegn. Først løser vi ligningen $f(x) = 0$ som har løsningsmængde $L = \{\text{-}1, 2, 3\}$. Disse tal markeres på en fortegnslinje. Rødderne inddeler tallinjen i fire intervaller. I hvert interval tages et tilfældigt tal og fortegnet for funktionsværdien udregnes. I intervallet $[\text{-}1; 2]$ kan vi f.eks. tage tallen $x = 0$ og vi udregner $f(0) = 6$, som er et positivt tal. Dette markerer vi på fortegnslinjen med et plus. Det betyder at alle funktionsværdier af tal i intervallet $[\text{-}1; 2]$ er positive. Konklusionen på en fortegnsundersøgelse er en liste over i hvilke intervaller funktionen er henholdsvis positive og negativ.



- Funktionen f er negativ i $]\text{-}\infty; \text{-}1]$.
- Funktionen f er positiv i $[\text{-}1; 2]$.
- Funktionen f er negativ i $[2; 3]$.
- Funktionen f er positiv i $[3; \infty[$.



Når man skal bestemme fortegnet for funktionsværdierne, er det ofte lettest at gøre det ved hjælp af det faktoriserede udtryk. Funktionen f kan skrives som $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$. Hvis vi starter med at indsætte en x-værdi, der er større end 3, er alle tre faktorer er positive, og derfor er resultatet positivt. Hvis vi derefter indsætter en værdi mellem 2 og 3, ser vi at de to første faktorer stadig er positive, mens den sidste faktor er negativ. Derfor er resultatet negativt. Hvis vi indsætter en x-værdi mellem -1 og 2, vil to faktorer blive negative, så produktet bliver positivt. Hvis vi tager en værdi mindre end -1 bliver alle tre faktorer negative, og resultatet bliver derfor negativt.

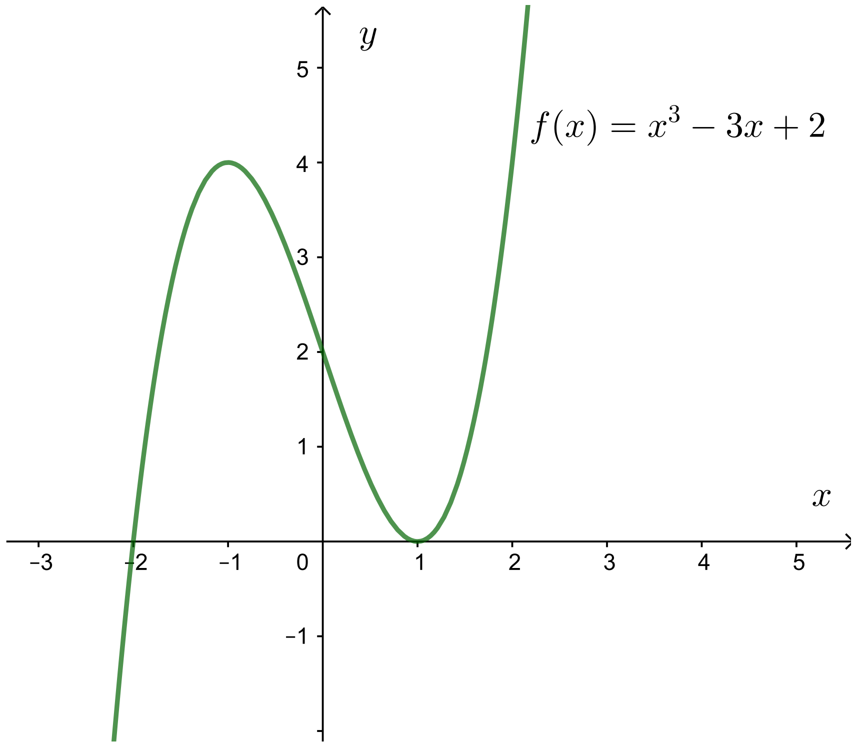
Eksempel 8. Lad $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Ved hjælp af $^p/_q$-metoden kan man lede efter rødder for polynomiet f, hvilket giver $x = 1$ som en af løsningerne til ligningen $f(x) = 0$. Roden $x = 1$ giver faktoriseringen $f(x) = \left(x^2 + x - 2\right)(x-1)$. Andengradsligningen $x^2 + x - 2 = 0$ har løsningerne $x = 1$ og $x =$ -2, så andengradspolynomiet har faktoriseringen $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Derfor har f faktoriseringen

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(x-1)(x-1) \\ &= (x+2)(x-1)^2 . \end{aligned}$$

En fortegnsundersøgelse giver følgende resultat.

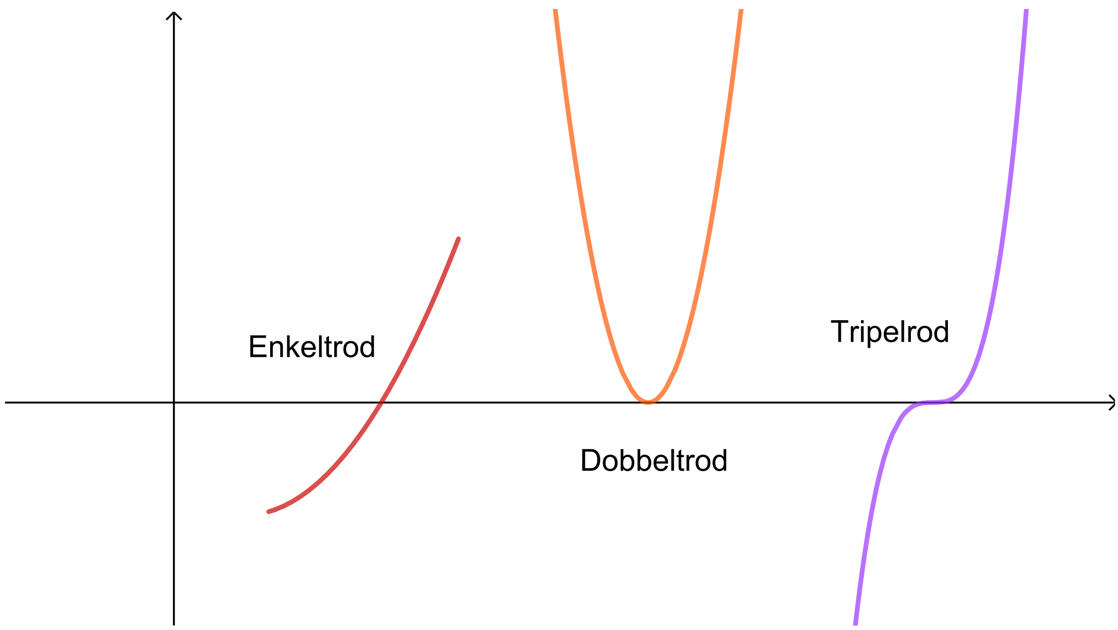
- Funktionen f er negativ i]-∞;-2].
- Funktionen f er positiv i [-2;∞[.

Vi ser, at roden $x = 1$ indgår to gange i faktoriseringen, og vi siger, at $x = 1$ er dobbeltrod.



Definition 2. Hvis roden $x = r$ kun ingår en gang i faktoriseringen af polynomiet f, så siges $x = r$ at være *enkeltrod*. Hvis $x = r$ indgår to gange i faktoriseringen af f, så siges $x = r$ at være *dobbeltrod*. Hvis $x = r$ ingår tre gange i faktoriseringen af f så siges $x = r$ at være *tripelrod*. Det antal gange en rod indgår i faktoriseringen af et polynomium kaldes *rodens multiplicitet*.

Ved en fortegnsundersøgelse for polynomiet f vil fortegnet skifte ved en enkeltrod. Hvis der er dobbeltrod, vil fortegnet ikke skifte. Hvis der er tripelrod, vil fortegnet skifte. En rods multiplicitet vil tydeligt kunne ses på grafen for polynomiet.



5 Bestemmelse af sekanter og tangenter med Horner

Definition 3. En *sekant* er en ret linje gennem (mindst) to forskellige punkter på grafen for en funktion.

Hvis man kender x-koordinaterne til to af disse punkter, kan man bestemme ligningen til sekanten ved at anvende Horners skema 2 gange.

Eksempel 9. Vi har tidligere set, at hvis $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 6$, så kan $f(x)$ omskrives til

$$f(x) = \left(2x^2 - x - 4\right)(x-2) - 2.$$

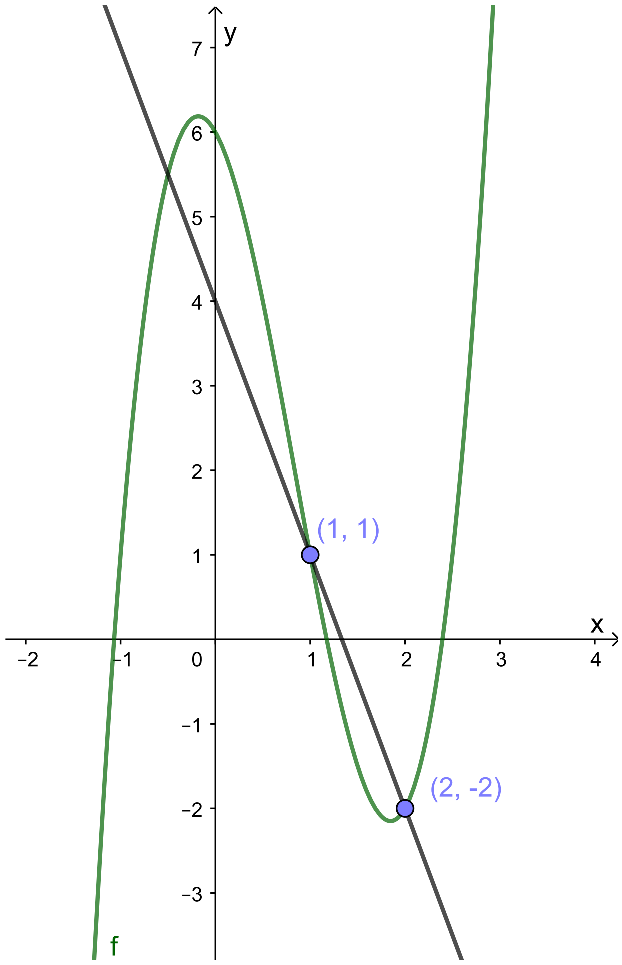
Grafen går således gennem punktet $(2, -2)$. Vi vil nu bestemme en ligning for sekanten gennem $(2, -2)$ og det punkt på grafen for f, som har førstekoordinat 1. Beregningen sker igen ved hjælp af Horners skema.

$$\begin{array}{r|ccc} & 2 & -1 & -4 \\ & 0 & 2 & 1 \\ \hline x=1 & 2 & 1 & \boxed{-3} \end{array}$$

Derfor gælder, at $2x^2 - x - 4 = (2x+1)(x-1) - 3$. Derfor kan man lave omskrivningen

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2x^2 - x - 4\right)(x-2) - 2 \\ &= ((2x+1)(x-1) - 3)(x-2) - 2 \\ &= (2x+1)(x-1)(x-2) - 3(x-2) - 2\,. \end{aligned}$$

Det første led $(2x+1)(x-1)(x-2)$ er lig nul, når $x = 1$ og når $x = 2$. Derfor er $f(x) = -3(x-2) - 2$ når $x = 1$ og når $x = 2$. Det vil sige, at sekanten for f gennem punkterne med x-koordinater $x = 1$ og $x = 2$ har ligning $y = -3(x-2) - 2$. Sekantens ligning kan reduceres til $y = -3x + 4$.



Generelt gælder at Biszouts sætning kan omskrives som

$$\begin{aligned} f(x_1) &= q(x_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) \\ f(x_1) - f(x_0) &= q(x_1) \cdot (x_1 - x_0) \\ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} &= q(x_1)\,. \end{aligned}$$

Kvotinenten q kan derfor opfattes som en *differenskvotient* (brøk med en differens i tæller og nævner), og denne differenskvotient er lig med sekantens hældning. Ofte skriver man differenskvotienten som $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, hvor det græske bogstav Δ (Delta, stort d) er en forkortelse for differens.

Sekantens ligning kan skrives som $s(x) = q(x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$. Ligningen $f(x) = s(x)$ vil i almindelighed have $x = x_0$ og $x = x_1$ som enkeltrødder. Hvis vi tænker os, at x_1 flyttes tættere og tættere på x_0, så vil sekantens hældning $q(x_1)$ nærme sig $q(x_0)$. Hvis x_1 sættes lig med x_0, så får vi en linje med ligning $t(x) = q(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, og ligningen $f(x) = t(x)$ får dobbeltrod $x = x_0$ i stedet for sekanten som har $x = x_0$ og $x = x_1$ som enkeltrødder. Linjen med ligning $y = t(x)$ kaldes tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0))$. Tangent er en lineær funktion, som giver en god tilnærmelse af et polynomium nær et givet punkt. Ligningen for en tangent kan beregnes ved hjælp af Horners skema på samme måde, som vi brugte Horners skema til at beregne en ligning for en sekant.

Eksempel 10. Vi har tidligere set, at hvis $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 6$, så kan $f(x)$ omskrives til

$$f(x) = \left(2x^2 - x - 4\right)(x - 2) - 2.$$

Vi laver nu polynomiers division en gang til, idet vi dividerer $g(x) = 2x^2 - x - 4$ med $x - 2$. Beregningen sker igen ved hjælp af Horners skema.

$$\begin{array}{r|ccc} & 2 & -1 & -4 \\ & 0 & 4 & 6 \\ \hline x=2 & 2 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

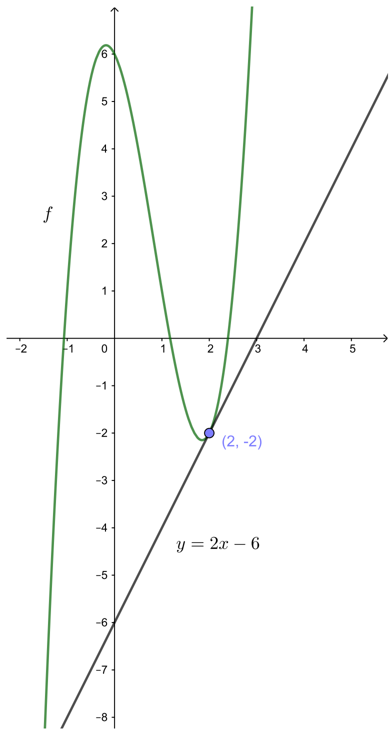
Det giver

$$g(x) = [2x + 3](x - 2) + 2.$$

For at holde de forskellige parenteser ude fra hinanden er det første parentespar skrevet med firkantede parenteser (klammar). Nu får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= [(2x + 3)(x - 2) + 2](x - 2) - 2 \\ &= (2x + 3)(x - 2)^2 + 2(x - 2) - 2 \\ &= (2x + 3)(x - 2)^2 + 2x - 6. \end{aligned}$$

Vi har dermed fået omskrevet polynomiet som en sum af en lineær funktion og et polynomium, som har dobbeltrod for $x = 2$. Tangenten har dermed ligning $y = 2x - 6$.



Eksempel 11. Vi er tidligere set, at hvis $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 7x - 6$, og $x = 2$, så bliver Horners skema

$$\begin{array}{r|cccc} & 3 & -7 & 7 & -6 \\ & 0 & 6 & -2 & 10 \\ \hline x=2 & 3 & -1 & 5 & \boxed{4} \end{array}$$

Så $f(x)$ kan omskrives omskrives til $f(x) = \left(3x^2 - x + 5\right)(x-2) + 4$. Vi laver nu polynomiers division en gang til, idet vi dividerer $q(x) = 3x^2 - x + 5$ med $x - 2$. Beregningen sker igen ved hjælp af Horners skema, men for at effektivisere udvider vi det tidligere skema med et par rækker mere.

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 3 & -7 & 7 & -6 \\
 & 0 & 6 & -2 & 10 \\
\hline
x = 2 & 3 & -1 & 5 & \boxed{4} \\
 & 0 & 6 & 10 & \\
\hline
 & 3 & 5 & \boxed{15} &
\end{array}
$$

Det giver

$$q(x) = (3x+5)(x-2) + 15.$$

Herved får vi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= [(3x+5)(x-2)+15](x-2)+4 \\
&= (3x+5)(x-2)^2 + 15(x-2) + 4 \\
&= (3x+5)(x-2)^2 + 15x - 26.
\end{aligned}
$$

Vi har dermed fået omskrevet polynomiet som en sum af en lineær funktion og et polynomium, som har dobbeltrod for $x = 2$. Tangenten har dermed ligning $y = 15x - 26$.

Øvelse 2. Bestem i hvert tilfælde tangenten for den pågældende x-værdi. Når tangenten er bestemt, plottes funktion og tangent i et koordinatsystem ved hjælp af GeoGebra eller et andet CAS-værktøj.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ for $x = 2$.

b) $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 5x + 2$ for $x = 1$.

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ for $x =$ -1.

Øvelse 3. En parabel er givet ved $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$. Udfyld tabellen

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							
$f'(x)$							

Tegn for hver værdi af xi tabellen det tilsvarende punkt samt en bid af tangenten gennem punktet. Brug punkter med tilhørende tangenter til at skitsere parablens forløb.

6 Parabler

Vi kan bruge vores viden om tangenter til at bevise toppunktsformlen for parabler.

Sætning 8 (Toppunktsformlen)**.** *Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et 2.-gradsplynomium. Da er grafen en parabel med toppunkt $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right)$, hvor d betegner diskriminanten bestemt ved $d = b^2 - 4ac$.*

Bevis. Man opskriver Horners skema for $x = \frac{-b}{2a}$ hvilket give

$$
\begin{array}{r|ccc}
 & a & b & c \\
 & 0 & -b/2 & \frac{-b^2}{4a} \\
\hline
x = \frac{-b}{2a} & a & b/2 & \boxed{c - \frac{b^2}{4a}} \\
 & 0 & -b/2 & \\
\hline
 & a & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Det betyder at der gælder

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Tilbage er at lave omskrivningen $c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-d}{4a}$. □