1 Differentiation af polynomier

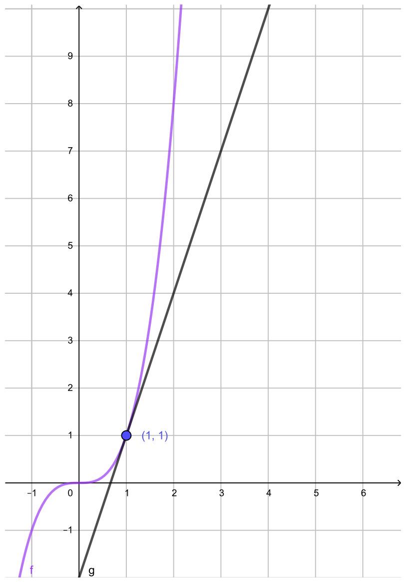
Disse noter bygger videre på noterne om polynomier og Horners skema. I de første afsnit af disse noter vil vi antage, at alle funktioner er polynomier. Nedenstående sætninger og beviser gælder faktisk også for andre funktioner, som kan differentieres, såkaldte differentiable funktioner, men hvad det vil sige venter vi lidt med.

Vi skal se hvordan man differentierer potensfunktioner og starter med et eksempel.

Eksempel 1. Lad $f(x) = x^3$. Vi er interesseret i at bestemme tangentens hældning for $x = 1$,hvilket kan gøre ved hjælp af Horners skema.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x = 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \\
 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{3} &
\end{array}
$$

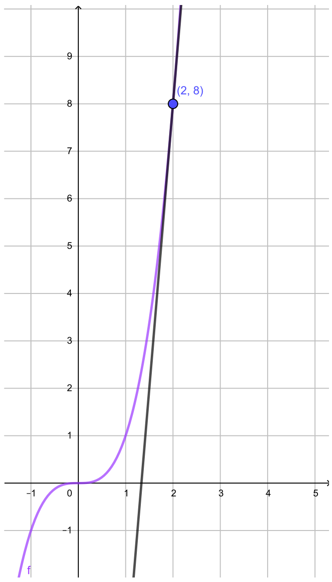
Heraf ses, at funktionens værdi er $f(1) = 1$ og at tangentens hældning i punktet $(1, 1)$ er $f'(1) = 3$. Ud fra disse tal kan man opskrive en ligning for tangenten, men i stedet vil vi se hvad der sker, hvis vi vælger en anden x-værdi.



Vi vil bestemme tangentens hældning for $x = 2$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x = 2 & 0 & 2 & 4 & 8 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & \boxed{8} \\
 & 0 & 2 & 8 & \\
\hline
 & 1 & 4 & \boxed{12} &
\end{array}
$$

Det viser, at funktionens værdi er $f(2) = 8$ og at tnagentens hældning er $f'(2) = 12$. Tangentens hældning afhænger tydeligvis af hvilken værdi af x vi tager udgangspunkt i.



I differentialregning er vi interesseret i hvordan tangentens hældning afhænger af den valgte x-værdi, så nu vil vi lave den samme type beregninger men uden at specificere værdien af x.

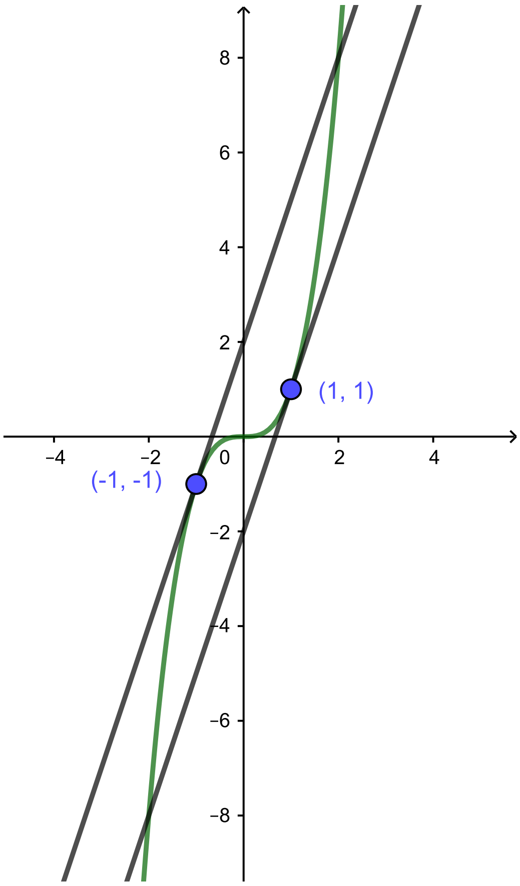
$$
x = x \begin{array}{|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x & x^2 & x^3 \\
\hline
1 & x & x^2 & \boxed{x^3} \\
0 & x & 2x^2 & \\
\hline
1 & 2x & \boxed{3x^2} &
\end{array}
$$

Det viser, at $f(x) = x^3$ (ikke ovrraskende, det var det vi startede med), og at $f'(x) = 3x^2$. Man siger at funktionen er *differentieret* og funktionen $f'(x)$ kaldes den *afledte funktion*.

Med den afledte funktion til rådighed kan vi besvare en ny type spørgsmål. Vi så ovenfor, at grafen har en tangent med hældning 3 i punktet $(1, 1)$. Vi kan nu bestemme eventuelle andre punkter med denne tangenthældning ved at løse ligningen

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3\,, \\
3x^2 &= 3\,, \\
x^2 &= 1\,, \\
x &= \pm 1\,.
\end{aligned}
$$

Løsningen $x = 1$ kender vi allerede, men løsningen $x = -1$ er ny. Vi beregner $f(-1) = -1$, så grafen har også en tangent med hældning 3 i punktet $(-1, -1)$.



Øvelse 1. Bestem ligningerne for hver af de 2 tangenter til grafen for funktionen $f(x) = x^3$, som har tangenthældning 12.

Sætning 1. *Hvis* $f(x) = kx^n$*, så er* $f'(x) = k \cdot nx^{n-1}$.

Bevis. Beviset foregår ved hjælp af Horners skema.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
x = x & 0 & kx & kx^2 & \ldots & kx^{n-1} & kx^n \\
\hline
 & k & kx & kx^2 & \ldots & kx^{n-1} & \boxed{kx^n} \\
 & 0 & kx & 2kx^2 & \ldots & (n-1) \cdot kx^{n-1} & \\
\hline
 & k & 2kx & 3kx^2 & \ldots & \boxed{n \cdot kx^{n-1}} &
\end{array}
$$

□

Øvelse 2. Differentiér følgende funktioner.

a) $f(x) = 4x^5$.

b) $f(x) = 3x^{10}$.

c) $f(x) = x^{76}$.

d) $f(x) = -5x^3$.

d) $f(x) = 7x$. Benyt at $7x = 7x^1$.

e) $f(x) = 3$. Benyt at $3 = 3x^0$.

Som vi tidligere har set, kan et polynomium f omskrives som

$$f(x) = q(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

hvor differenskvotienten $q(x)$ kan beregnes ved hjælp af Horners skema. Tangentens hældning i punktet $(x_0, f(x_0))$ betegnes $f'(x_0)$ og beregnes som værdien af $q(x_0)$. Værdien af $q(x_0)$ kan beregnes ved at lave Horners skema en gang mere. Bemærk, at ligningen kan omskrives som

$$
\begin{aligned}
f(x) &= q(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\
f(x) - f(x_0) &= q(x) \cdot (x - x_0) \\
\Delta f &= q(x) \cdot \Delta x.
\end{aligned}
$$

Sætning 2 (Sumreglen)**.** *Hvis* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$*, så er* $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$.

Bevis. Antag at

$$\begin{aligned} f_1(x) &= q_1(x) \cdot \Delta x + f_1(x_0), \\ f_2(x) &= q_2(x) \cdot \Delta x + f_2(x_0). \end{aligned}$$

Disse to ligninger lægges sammen

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= q_1(x) \cdot \Delta x + f_1(x_0) + q_2(x) \cdot \Delta x + f_2(x_0), \\ f(x) &= q_1(x) \cdot \Delta x + q_2(x) \cdot \Delta x + f_1(x_0) + f_2(x_0), \\ f(x) &= (q_1(x) + q_2(x)) \cdot \Delta x + f(x_0), \\ \Delta f &= (q_1(x) + q_2(x)) \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Derfor er $f'(x_0) = q_1(x_0) + q_2(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0)$. □

Eksempel 2. Vi vil differentiere funktionen $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 2$. Det giver $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x^1 + 3 \cdot 1x^0 + 0$. Dette omskrives til $f'(x) = 15x^2 - 14x + 3$. Med lidt øvelse behøver man lave mellemregningen i hovedet og nøjes med at skrive resultatet.

Øvelse 3. Differentiér følgende funktioner.

a) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x + 8$.

b) $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 2x + 3$.

c) $f(x) = x^5 + x^3$.

d) $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{7}$

e) $f(x) = \pi x^3 + 7^{1/2}x^2 + 4^{1/3}x + \left(2 + 3^{2/5}\right)^4$.

Øvelse 4. Der gælder at hvis $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, så er $f'(x) = f_1'(x) - f_2'(x)$. Bevis denne formel. Beviset fungerer på samme måde som beviset for sumreglen.

Øvelse 5. Differentiér følgende funktioner.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 8$.

b) $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 2x + 3$.

2 Monotoniforhold

Begreberne positiv og negativ benyttes i lidt afvigende betydninger af forskellige matematikere. I forbindelse med undersøgelser af funktioners monotni- og krumningsforhold vil vi holde os til følgende definition.

Definition 1. Et tal $x \in \mathbb{R}$ siges at være *positivt* dersom $x \geq 0$, og x siges at være *strengt positiv* dersom $x > 0$. Tilsvarende siges tallet x at være *negativt* dersom $x \leq 0$, og x siges at være *strengt negativt* dersom $x < 0$.

Definition 2. Funktionen f siges at have *positiv vækst*, dersom alle sekanter har positiv hældning. Tilsvarende siges funktionen f at have *negativ vækst*, dersom alle sekanter har negativ hældning.

Funktioner med positiv vækst kaldes også voksende funktioner, og funktioner med negtiv vækst kaldes også aftagende funktioner.

Sætning 3 (Monotonisætningen)**.** *Antag, at funktionen f er defineret på et interval. Hvis f' er positiv, så har f positiv vækst, og hvis f' er negativ, så har f negativ vækst.*

Bevis. Vi vil først vise, at hvis grafen for f har en sekant med strengt positiv hældning, så har f også en tangent med strengt positiv hældning. Det vil sige, at hvis f' er negativ, så kan grafen for f ikke have en sekant med strengt positiv hældning og må derfor være aftagende.

Antag at $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$. Lad g betegne ligningen for sekanten mellem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Hvis $f = g$, så er $f'(x) = g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ for alle $x \in [a; b]$.

Antag at $f \neq g$. Da har grafen for f og sekanten muligvis et eller flere skæringspunkter mellem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$, og i så fald vil vi erstatte b med førstekoordinaten til det mindste af disse skæringspunkter. Vi kan derfor antage, at der ikke er skæringspunkter mellem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

Antag at grafen for f ligger over sekanten mellem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Da vil en enhver sekant mellem $(a, f(a))$ og $(x, f(x))$ have større hældning end $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Da tangenthældningen er grænseværdien af sekanthældningerne, gælder $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$.

Beviset fungerer på samme måde for positiv vækst. □

Sætningen kan bruges til at bestemme en funktions *monotoniforhold*, hvilket vil sige at bestemme intervaller, hvor funktionen har positiv, henholdvis negativ vækst. Sådanne intervaller kaldes *monotoniintervaller*.

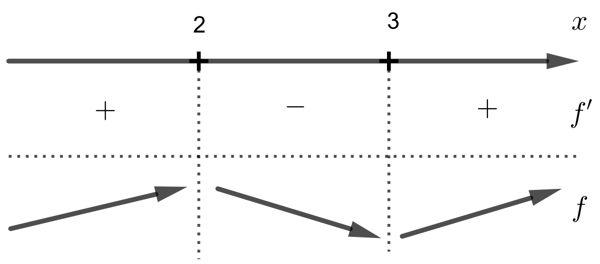
Eksempel 3. Lad f være funktionen $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 22$. Vi vil gerne bestemme funktionens monotoniforhold, så vi differentierer funktionen

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36.$$

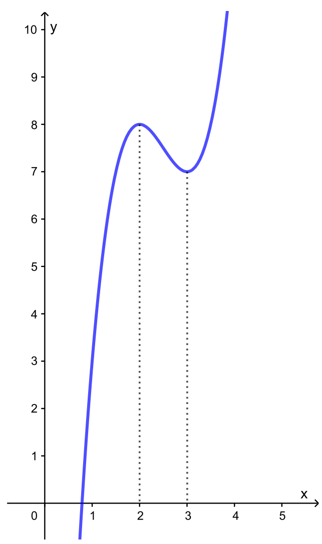
Vi vil nu bestemme fortegnsvariationen for f, og for at gøre det vil vi først bestemme rødderne for f', å $f'(x)$ sættes lig nul og ligningen løses.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0\,, \\ 6x^2 - 30x + 36 &= 0\,, \\ x^2 - 5x + 6 &= 0\,. \end{aligned}$$

Eventuelle heltallige løsninger til denne ligning skal gå op i 6, og man finder hurtigt frem til, at de to løsninger må være $x = 2$ og $x = 3$. Løsningerne kan også bestemmes ved at udregne diskriminanten og indsætte i løsningsformlen for 2.-gradsligninger. Fortengsvariationen for f' bestemmes ved at indsætte tilfælige værdier af x fra hvert af intervallerne $]-\infty; 2[$, $]2; 3[$ og $]3; \infty[$.



* f' er positiv i intervallet $]-\infty; 2]$.
* f' er negativ i intervallet $[2; 3]$.
* f' er positiv i intervallet $[3; \infty[$.
Ved hjælp af sætningen oversætter vi fortegnsvariationen for f' til monotoniforhold for f.
* f har positiv vækst i intervallet $]-\infty; 2]$.
* f har negativ vækst i intervallet $[2; 3]$.
* f har positiv vækst i intervallet $[3; \infty[$.



Vi kan også benytte sætningen til at bestemme funktioners mindste og største værdier.

Definition 3. Den mindste værdi, en funktion kan antage, kaldes funktionens *minimum*. Den største værdi, en funktion kan antage, kaldes funktionens *maksimum*. Den mindste og den største værdi kaldes tilsammen funktionens *ekstrema* (flertal af ekstremum). Hvis x er en værdi så $f(x)$ er et ekstremum, så kaldes punktet $(x, f(x))$ for et *ekstremumspunkt*, og værdien x kaldes for et *ekstremumssted*. Hvis x er ekstremumssted for funktionen i et lille interval omkring x, så kaldes x et *lokalt ekstremumsted*, og $(x, f(x))$ kaldes et *lokalt ekstremumspunkt*.

Bemærk, at det ikke giver mening at tale om et lokalt ekstremum uden at henvise til ekstremumstedet. Vores sætning giver en effektiv metode til at bestemme en funktions ekstrema.

Eksempel 4. Lad f være funktionen $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 23$, $x \in [1;6]$. Her angiver $[1;6]$, at funktionen kun er defineret i dette interval. Først differentieres funtionen.

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45\,.$$

Den afledte funktion sættes lig nul, og ligningen løses.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0\,, \\ 3x^2 - 24x + 45 &= 0\,, \\ x^2 - 8x + 15 &= 0\,, \\ x = 3 &\vee x = 5\,. \end{aligned}$$

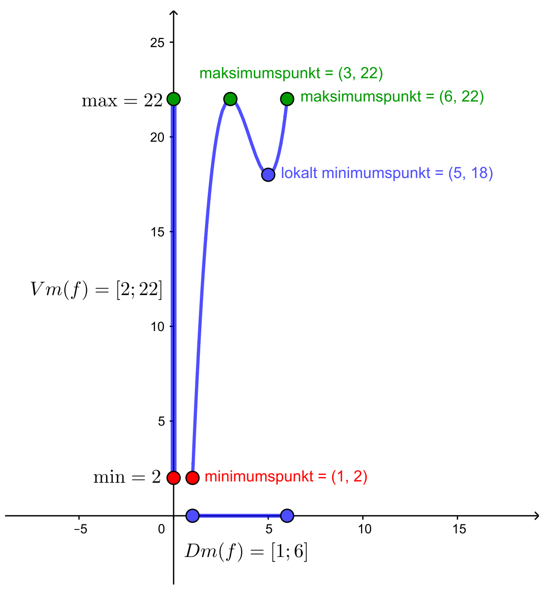
Fortegnet for f' i tilfældigt valgte punkter i hvert af intervallerne $]1;3[$, $]3;5[$og $]5;6[$ bestemmes, og vi ser at
* f' er positiv i intervallet $[1;3]$.
* f' er negativ i intervallet $[3;5]$.
* f' er positiv i intervallet $[5;6]$.

Dette giver monotoniforholdene
* f har positiv vækst i intervallet $[1;3]$.
* f' har negativ vækst i intervallet $[3;5]$.
* f' har positiv vækst i intervallet $[5;6]$.

Ud fra monotoniforholdene kan vi se at funktionen har lokalt minimum for $x = 1$ og for $x = 5$, og at funktionen har lokalt maksimum for $x = 3$ og for $x = 6$. For at bestemme minimum skal funktionens værdi i $x = 1$ og i $x = 5$ bestemmes. Tilsvarende skal funktionens værdi i $x = 3$ og i $x = 5$ udregnes for at bestemme funktionens maksimum. Vi laver derfor et sildeben med funktionens værdier i de lokale ekstremumspunkter.

x	$f(x)$
1	2
3	22
5	18
6	22

Minimum er derfor 2 og antages for $x = 0$. Maksimum er 22 og antages for $x = 2$ og for $x = 5$. Funktionen har derfor minimumspunktet $(1, 2)$ og de 2 maksimumspunkter $(3, 33)$ og $(6, 22)$. Endvidere har funktionen det lokale mimumumspunkt $(5, 18)$. Værdimængden er intervallet $Vm(f) = [2;22]$.



Ovenstående eksempel illustre,r at bestemmelse af monotoniforholdene faktisk ikke er nødvendigt for at bestemme ekstrema for en funktion defineret på et lukket begrænset interval. Det er tilstrækkeligt at bestemme funktionsværdierne i intervallets endepunkter samt værdierne i punkterne med vandret tangent - de såkaldte *stationære punkter*. Endvidere kan vi se, at der gælder følgende sætning.

Sætning 4 (Fermats sætning)**.** *Hvis polynomiet f har lokalt ekstremum for $x = x_0$ i et indre punkt i definitionsmængden, så er $f'(x_0) = 0$.*

Eksempel 5. Vi vil bestemme værdimængden for funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \in [0;4]$. Den afledte funktion er $f'(x) = 2x - 2$. Vi finder eventuelle rødder for f' ved at løse ligningen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0\,, \\ 2x - 2 &= 0\,, \\ x &= 2\,. \end{aligned}$$

Herefter laves et sildeben over funktionsværdier i stationære punkter og i definitionsmængdens intervalendepunkter.

x	$f(x)$
0	3
1	2
4	11

Som det ses er minimum lig med 2 og maksimum er lig med 11. Værdimængden er derfor $Vm(f) = [2;11]$. Af sildebenet kan man også umiddelbart se, at væksten er negativ i $[0;1]$, og at væksten er positiv i $[1;4]$.

3 Yderligere regneregler

Sætning 5 (Produktreglen)**.** *Hvis $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, så er $f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$.*

Bevis. Antag at

$$\begin{aligned} f_1(x) &= q_1(x) \cdot \Delta x + f_1(x_0)\,, \\ f_2(x) &= q_2(x) \cdot \Delta x + f_2(x_0)\,. \end{aligned}$$

Disse to ligninger ganges sammen

$$\begin{aligned} f_1(x) \cdot f_2(x) &= (q_1(x) \cdot \Delta x + f_1(x_0)) \cdot (q_2(x) \cdot \Delta x + f_2(x_0))\ , \\ f(x) &= q_1(x) \cdot \Delta x \cdot q_2(x) \cdot \Delta x + q_1(x) \cdot \Delta x \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot q_2(x) \cdot \Delta x + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0)\,, \\ f(x) &= (q_1(x) \cdot \Delta x \cdot q_2(x) + q_1(x) \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot q_2(x)) \cdot \Delta x + f(x_0)\ , \\ \Delta f &= (q_1(x) \cdot \Delta x \cdot q_2(x) + q_1(x) \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot q_2(x)) \cdot \Delta x\,. \end{aligned}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= q_1(x_0) \cdot 0 \cdot q_2(x_0) + q_1(x_0) \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot q_2(x_0) \\ &= 0 + f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0). \end{aligned}$$

□

Et specielt vigtigt tilfælde af produktreglen er situationen, hvor $f_1(x) = k$, altså hvor den første funktion er en konstant. I den situation siger produktreglen, at hvis $f(x) = k \cdot f_2(x)$ så er

$$\begin{aligned} f'(x) &= k' \cdot f_2(x) + k \cdot f_2'(x) \\ &= 0 \cdot f_2(x) + k \cdot f_2'(x) \\ &= k \cdot f_2'(x)\ . \end{aligned}$$

Øvelse 6. Differentiér nedenstående funktioner ved hjælp af produktreglen.

a) $f(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right) \cdot \left(2x^2 - x + 3\right)$.

b) $f(x) = \left(x^4 + 4\right) \cdot \left(x^3 + 2\right)$.

c) $f(x) = \left(2x^2 + 5x - 7\right) \cdot x^5$.

d) $f(x) = 3 \cdot \left(x^3 - 6x^2 + 7x - 2\right)$.

Sætning 6 (Kædereglen)**.** *Antag at $h(x) = f(g(x))$, hvor f og g er polynomier funktioner. Da er*

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\ .$$

Bevis. Vi vil lade $y = g(x)$, så $h(x) = f(y)$. Lad x_0 være et punkt i definitionsmængden og lad $y_0 = g(x_0)$. Antag at

$$\begin{aligned} f(y) &= q_1(y) \cdot \Delta y + f(y_0) \,, \\ g(x) &= q_2(x) \cdot \Delta x + g(x_0) \,. \end{aligned}$$

Da gælder $\Delta y = g(x) - g(x_0) = q_2(x) \cdot \Delta x$.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(y) \,, \\ h(x) &= q_1(y) \cdot \Delta y + f(y_0) \,, \\ h(x) &= q_1(y) \cdot q_2(x) \cdot \Delta x + f(g(x_0)) \,, \\ h(x) &= q_1(g(x)) \cdot q_2(x) \cdot \Delta x + h(x_0) \,, \\ \Delta h &= q_1(g(x)) \cdot q_2(x) \cdot \Delta x \,. \end{aligned}$$

Derfor er differenskvotienten $q_1(g(x)) \cdot q_2(x)$. Differentialkvotienten fås ved at sætte $x = x_0$ind i udtrykket for differenskvotienten, hvilket giver

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= q_1(g(x_0)) \cdot q_2(x_0) \\ &= q_1(y_0) \cdot q_2(x_0) \\ &= f'(y_0) \cdot g'(x_0) \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \,. \end{aligned}$$

□

Øvelse 7. Differentiér nedenstående funktioner ved hjælp af kædereglen.

a) $h(x) = (2x+3)^5$.

b) $h(x) = \left(x^2+5\right)^3$.

c) $h(x) = \left(2x^2 - 5x + 7\right)^4$.

d) $h(x) = 3 \cdot \left(2x^3 - 3x + 7\right)^6$.

4 Differentiable funktioner

Definition 4. En funktion f med definitionsmængde $Dm(f)$ siges at være *differentiabel* i $x_0 \in Dm(f)$, dersom der findes en funktion q så

$$f(x) = q(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \,,$$

og så q er kontinuert i x_0. Differentialkvotienten i x_0 er defineret som værdien $q(x_0)$. Funktionen f siges at være *differentiabel*, dersom f er differentiabel for alle $x_0 \in Dm(f)$. Differentialkvotienten som funktion af x_0 kaldes den *afledte funktion* og betegnes f'.

Med ovenstående definition får vi umiddelbart følgende sætning.

Sætning 7. *Alle differentiable funktioner er kontinuerte.*

Hvis man skriver $\Delta x = x - x_0$,så er $x = x_0 + \Delta x$. Man kan så lave omskrivningen

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= q(x) \cdot \Delta x \\ q(x) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Bemærk, at funktionen q er kontinuert betyder, at differenskvotienten q har en grænseværdi for x gående mod x_0.

Men ovenstående definition af differentiable funktioner, vil de regneregler, vil har bevist, glælde for alle differentiable funktioner. Endvidere er der en række andre funktioner man også kan differentiere. Disse fremgår af nedenstående tabel.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
e^x	e^x
$\ln(x)\,,\ x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + (\tan(x))^2$

Ved at sammenholde denne tabel med vore regneregler er det muligt at differentiere ganske komplicerede funktionsudtryk.

Øvelse 8. Differentiér nedenstående potensfunktioner.

a) $f(x) = 3x^{-4}$.

b) $f(x) = 12 \cdot x^{7/6}$.

c) $f(x) = \frac{5}{x}$. Benyt at $\frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1}$.

d) $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

e) $f(x) = \sqrt{x}$. Benyt at $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Benyt at $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$.

Øvelse 9. Differentiér nedenstående eksponentialfunktioner.

a) $f(x) = 2^x$.

b) $f(x) = 10^x$.

c) $f(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^x$.

d) $f(x) = 1^x$.

e) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

f) $f(x) = 4 \cdot \mathrm{e}^{3x}$.

Øvelse 10. Differentiér nedenstående funktioner ved hjælp af produktreglen.

a) $f(x) = \mathrm{e}^x \cdot \left(x^2 - 5x + 7\right)$.

b) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

c) $f(x) = \sin(x) \cdot 2^x$.

d) $f(x) = \left(x^3 + 3x\right) \cdot \cos(x)$.

e) $f(x) = \ln(x) \cdot \mathrm{e}^x$.

Øvelse 11. Differentiér nedenstående funktioner ved hjælp af kædereglen.

a) $f(x) = \sin(3x)$.

b) $f(x) = \ln\left(x^2 + 3\right)$.

c) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

e) $f(x) = \cos(2x - 5)$.