Opgave 1

Se bilag!

Opgave 2

Nedenstående kvadratiske ligning omskrives

$$\begin{aligned}
9x^2-90x+4y^2+16y+205 &= 0\\
9\left(x^2-10x\right)+4\left(y^2+4y\right) &= -205\\
9\left((x-5)^2-5^2\right)+4\left((y+2)^2-2^2\right) &= -205\\
9\left(x-5\right)^2+4\left(y+2\right)^2 &= 9\cdot 5^2+4\cdot 2^2-205\\
9\left(x-5\right)^2+4\left(y+2\right)^2 &= 36\\
\frac{9\left(x-5\right)^2}{36}+\frac{4\left(y+2\right)^2}{36} &= 1\\
\frac{\left(x-5\right)^2}{4}+\frac{\left(y+2\right)^2}{9} &= 1\\
\frac{\left(x-5\right)^2}{2^2}+\frac{\left(y+2\right)^2}{3^2} &= 1
\end{aligned}$$

Derfor er løsningskurven en ellipse med centrum i $(5,-2)$ og med halvakser $a=2$ og $b=3$.

Opgave 3

Af figuren ses tydeligt at der må være minimum i punktet $(6,3)$. Funktionens mindsteværdi er derfor $f(6,3)=3\cdot 6+4\cdot 3=\underline{\underline{30}}$.

Opgave 4

Af figuresn ses at graferne for f og g skærer hinanden i $x=0$ og $x=3$. Dette checkes ved at sætte ind i ligningerne $f(x)=g(x)$. Da g ligger øverst er arealet

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \left(g(x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \left(\left(-x^2+3x+4\right)-\left(x^2-3x+4\right)\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^3 \left(-2x^2+6x\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3\\
&= \left(-\frac{2}{3}\cdot 3^3+3\cdot 3^2\right)-0\\
&= \underline{\underline{9}}\,.
\end{aligned}$$

Opgave 5

Idet $y=-3\ln(x)+\frac{1}{2}x^2-5x-3$,er ${}^{\mathrm{d}y}\!/\!{}_{\mathrm{d}x}=-{}^{3}\!/\!{}_{x}+x-5$. Venstre og højre side af differentialligningen $x\cdot y'-3\ln(x)=y+\frac{1}{2}x^2$ udregnes hver for sig.

$$\begin{aligned}
Vs &= x\cdot\left(-\frac{3}{x}+x-5\right)-3\ln(x)=-3+x^2-5x-3\ln(x)\ ,\\
Hs &= \left(-3\ln(x)+\frac{1}{2}x^2-5x-3\right)+\frac{1}{2}x^2=-3\ln(x)+x^2-5x-3\,.
\end{aligned}$$

Da $Vs=Hs$, er $y=-3\ln(x)+\frac{1}{2}x^2-5x-3$ løsning til differentialligningen.

Opgave 6

Definition Den naturlige eksponentialfunktion kan defineres som den omvendte funktion til den naturlige logaritmefunktion (forudsat at den naturlige logaritmefunktion allerede er defineret). For $a > 0$ defineres

$$a^x = \exp\left(x \cdot \ln\left(a\right)\right).$$

Da kan en eksponentiel funktion defineres som en funktion med forskriften $f\left(x\right) = b \cdot a^x$. Ofte kræver man at $b > 0$ og at $a \neq 1$.

Egenskaber Hvis $f\left(x\right) = b \cdot a^x$ og $b > 0$, så gælder

- Hvis $a > 1$, så er væksten positiv
- Hvis $0 < a < 1$, så er væksten negativ.
- Hvis $a = 1$, vil f være en konstant funktion, og f vil dermed være lineær.

Den eksponentielle funktion $f\left(x\right) = b \cdot a^x$ har egenskaben, at

$$f\left(x + T\right) = f\left(x\right) \cdot a^T.$$

Specielt gælder $f\left(x + T\right) = f\left(x\right) \cdot 2$, hvis $T = \ln\left(2\right) / \ln\left(a\right)$. Hvis $f\left(x\right) = b \cdot a^x$, så er

$$f'\left(x\right) = b \cdot \ln\left(a\right) \cdot a^x.$$

Anvendelser Mange anvendelser af eksponentielle funktioner bygger på, at en differentialligning af formen

$$y' = k \cdot y$$

har fuldstændig løsning

$$f\left(x\right) = b \cdot \exp\left(k \cdot x\right),$$

hvor b er en arbitrær konstant. Denne type differentialligninger optræder f.eks. ved beskrivelse af vækst af populationer, udbredelse af epidemiske sydomme, økonomisk vækst og radioaktive henfald, hvor væksten er negativ.

Opgave 7

a) Ydelsen på et kreditforeningslån beregnes som $y = 0.75 \cdot 1\,600\,000 \cdot \frac{0.003}{1-1.003^{-4\cdot 20}} = \underline{\underline{16\,894.31}}$ kroner pr. kvartal

b) Som det fremgår af amortiseringsplanen er den samlede renteudgift det første år lig med 14 160,22 kroner. De faste udgifter er $12 \cdot 3400 = 40\,800$ kroner. De samlede udlejningsindtægter skal derfor mindst være $14\,160.22 + 40\,800 = \underline{\underline{54\,960.22}}$ kroner.

termin	Primo restgæld	Ydelse	rente	Afdrag	Ultimo restgæld
1	1200000,00	16894,31	3600,00	13294,31	1186705,69
2	1186705,69	16894,31	3560,12	13334,19	1173371,50
3	1173371,50	16894,31	3520,11	13374,20	1159997,30
4	1159997,30	16894,31	3479,99	13414,32	1146582,98
			14160,22		

Opgave 8

Funktionen f er givet ved

$$f\left(x\right) = \left(-2x + 2\right) \cdot \left(-x^2 + 2x + 8\right)^{1/2}.$$

a) Funktionen er defineret, når $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$. Først løses den tilsvarende ligning

$$-x^2 + 2x + 8 = 0,$$

$$x = \frac{-2 \pm \left(2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8\right)^{1/2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 6}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}.$$

Derfor er $\underline{\underline{Dm\left(f\right) = \left[-2; 4\right]}}$.

Funktionen f har nulpunkter for $\underline{\underline{x=-2}}$ og for $\underline{\underline{x=4}}$ samt når $-2x+2=0$, hvilket er det samme som $\underline{\underline{x=1}}$.

b) Nedenfor er stamfunktionen $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bestemt.

1)	$\int(-2x+2)\cdot\left(-x^2+2x+8\right)^{1/2}\,\mathrm{d}x$	Forskriften for f er indsat.
2)	$=\int t^{1/2}\,\mathrm{d}t$	$t=-x^2+2x+8$ og $\mathrm{d}t=(-2x+2)\,\mathrm{d}x$ substitutieres ind i 1).
3)	$=\frac{2}{3}t^{3/2}+k$	En stamfunktion til $t^{1/2}$bestemmes.
4)	$=\frac{2}{3}\left(-x^2+2x+8\right)^{3/2}+k$	t substitutieres tilbage i udtrykket i 3).

c) Da $f\geq 0$ i $[-2;1]$, og $f\leq 0$ i $]1;4[$, er arealet mellem x-aksen og grafen for f givet ved

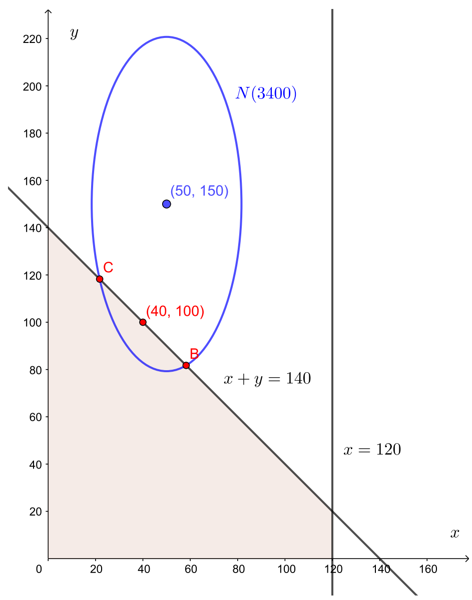
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x&=[F(x)]_{-2}^{1}-[F(x)]_{1}^{4}\\&=2F(1)-F(-2)-F(4)\\&=2\cdot\frac{2}{3}\left(-1^2+2\cdot 1+8\right)^{3/2}-\frac{2}{3}\left(-(-2)^2+2(-2)+8\right)^{3/2}-\frac{2}{3}\left(-4^2+2\cdot 4+8\right)^{3/2}\\&=\frac{4}{3}\cdot 9^{3/2}-0-0=\underline{\underline{36}}.\end{aligned}$$

Opgave 9

a) Det samlede dækningsbidrag er

$$\begin{aligned}DB(x,y)&=(-0.50x+60-10)\cdot x+(-0.10y+40-10)\cdot y\\&=\underline{\underline{-0.50x^2+50x-0.10y^2+30y}}.\end{aligned}$$

b) Da koefficienterne til x^2 og y^2 er negative, har funktionen DB har frit maksimum i punktet $\left(\frac{-50}{2\cdot(-0.50)},\frac{-30}{2\cdot(-0.10)}\right)=(50,150)$ med værdi $DB(50,150)=0-(-0.50)\cdot 50^2-(-0.10)\cdot 150^2=3500$. Derfor er niveaukurverne $N(t)$ ellipser for $t<3500$.



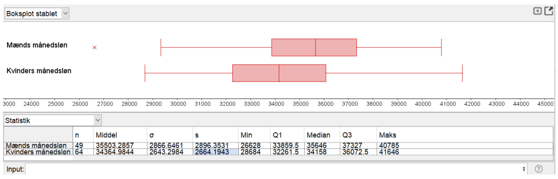
c) Som det ses af figuren antages det frie maksimum uden for polygonområdet, og maksimum under bibetingelser må antages på linjen $x+y=140$. Derfor indsættes $y=140-x$ i kriteriefunktionen, hvilket giver en funktion

$$\begin{aligned}g(x)&=-0.50x^2+50x-0.10\cdot(140-x)^2+30\cdot(140-x)\ ,\\g'(x)&=-1.00x+50-0.20\cdot(140-x)\cdot(-1)-30\\&=-1.20x+48\,.\end{aligned}$$

Nu sættes $g'(x)=0$, hvilket giver $x={}^{48}/_{1.20}=40$. Den tilsvarende y-værdi er $y=140-40=100$. Det maksimale dækningsbidrag er derfor $DB(40,100)=-0.50\cdot 40^2+50\cdot 40-0.10\cdot 100^2+30\cdot 100=\underline{\underline{3200}}$ kroner.

Opgave 10

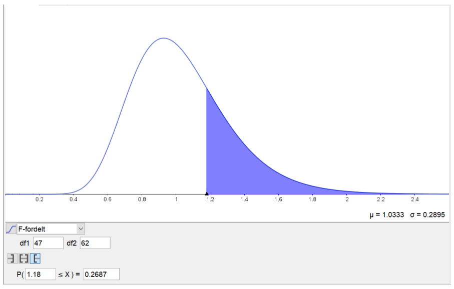
a) Data indlæses i GeoGebra og man aflæser at mændenens gennemsnitsintægt er $\underline{\underline{35\,503}}$ med en varians på $\sigma_1^2 = 2866.646^2 = \underline{\underline{8\,219\,659}}$. Kvindernes gennemsnitsindtægt er $\underline{\underline{34\,365}}$ med en varians på $\sigma_2^2 = 2643.2984^2 = \underline{\underline{6\,987\,026}}$.



b) For at teste om varianserne er ens udregnes F-teststørrelsen til

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2896.3531^2}{2664.1943^2} = 1.18\,.$$

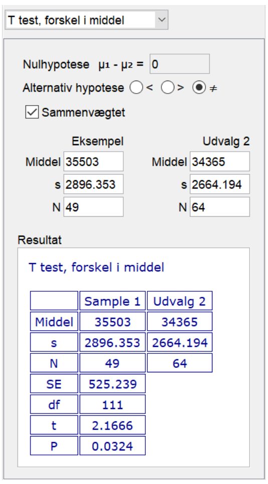
Herefter bestemmes p-værdien til $2 \cdot 0.2687 = 0.5374$. Da p-værdien er over signifikansniveauet på 5 %, kan vi $\underline{\underline{\text{ikke afvise at varianserne er ens}}}$.



c) Det fælles variansestimat er

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{(n-1)\,s_1^2 + (n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{(49-1)\cdot 2\,896.353^2 + (64-1)\cdot 2\,664.194^2}{49+64-2} \\ &= \underline{\underline{7\,656\,171}} \end{aligned}$$

Herefter lavet en t-test for at undersøge om mænd og kvinder har samme middelløn. Da p-værdien er 0.03 og dermed under signifikansniveauet på 5 %, kan vi konkludere at $\underline{\underline{\text{mænd og kvinder har forskellig middelløn}}}$.

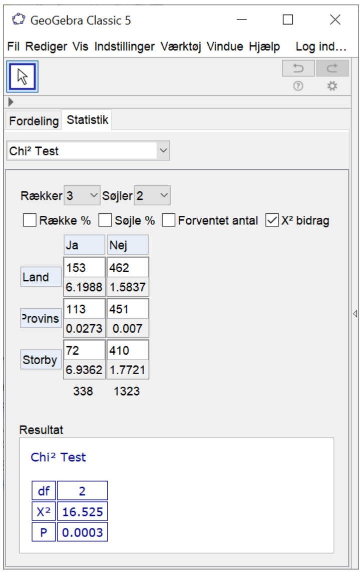


Opgave 11

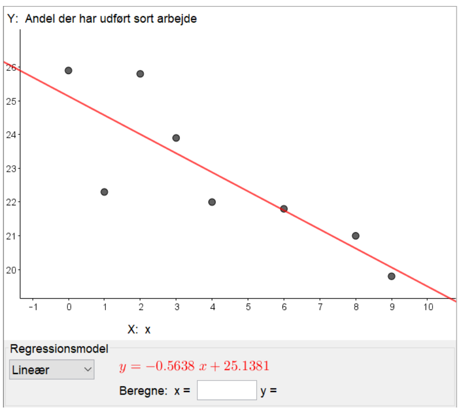
a) Data fra filen *sort arbejde* er optalt ved hjælp af en pivottabel. Resultatet ses nedenfor.

Antal af Sort anav			
Rækkenavn	**Ja**	**Nej**	**Hovedtotal**
Land	153	462	615
Provins	113	451	564
Storby	72	410	482
Hovedtotal	**338**	**1323**	**1661**

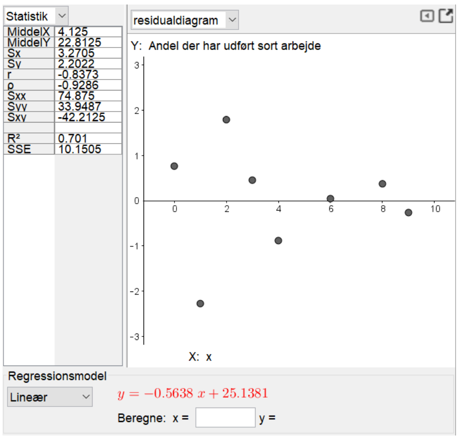
b) Værdierne af χ^2-bidragene fremgår nedenfor. Hvis svarene ang. sort arbejde ikke afhænger af om man er i provinsen eller ej, så kan det forventedee antal Nej-svar i provinsen beregnes som $\frac{564\cdot 1323}{1661} = 449.2$. Derfor er χ^2-bidraget $\frac{(451-449.2)^2}{449.2} = 0.007$. Da p-værdien på 0.0003 er under signifikansniveauet på 5 %, kan vi konkludere, at der er en sammenhæng mellem sort arbejde og befolkningstæthed.



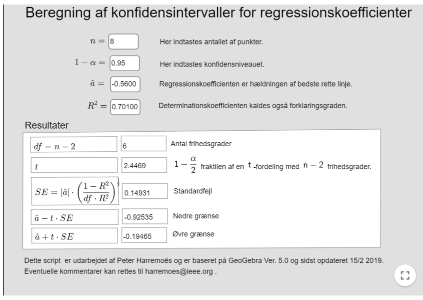
c) Nedenfor ses et xy-plot af antal år efter år 2008 og den procentvise andel, som har udført sort arbejde. Den bedste lineære model er $y = -0.56x + 25.14$.



d) Nedenfor ses et residualplot, som tyder, på at variansen er størst i begyndelsen af perioden. For at kunne beregne et 95 % konfidensinterval for hældningen vil vi dog antage at variansen har været konstant.



Et 95 % konfidensinterval beregnes til $\underline{\underline{[-0.93; -0.19]}}$. Da 0 ikke ligger i konfidensintervallet, kan vi konkludere at andelen, som udfører sort arbejde, <u>er faldende</u>.



Opgave 12

a) Et produkts livscyklus er beskrevet ved differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -0.06t^2 + 0.6t + 0.6\,.$$

Derfor er

$$\begin{aligned} q(t) &= \int \left(-0.06t^2 + 0.6t + 0.6\right)\,\mathrm{d}t \\ &= -0.02t^3 + 0.3t^2 + 0.6t + k\,. \end{aligned}$$

Da $q(0) = 2$, ses at $\underline{\underline{q = -0.02t^3 + 0.3t^2 + 0.6t + 2}}$.

b) For bestemme det tidspunkt, hvor q vokser hurtigst bestemmes q''.

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = -0.12t + 0.6\,.$$

Den anden afledte sættes lig nul og ligningen løses.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} &= 0\,, \\ -0.12t + 0.6 &= 0\,, \\ t &= \frac{0.6}{0.12} = 5\,. \end{aligned}$$

Produktets levetid vokser hurtigst <u>5 måneder</u> efter introduktionen.

Bilag 1 til opgave 1

Skole: Niels Brock	**Hold:**
Eksamensnr.	**Navn:** Peter Harremoës