Peter Bregendal

Matematik A
Løsninger
2019-08

Delprøven uden hjælpemidler

Opgave 1
a) 35% er over 60 år. 20%-fraktilen er 35 år.

Opgave 2
a) Bestemmer ligevægtsprisen:

$$-0{,}4x + 87 = 0{,}25x + 22$$
$$-0{,}65x = -65$$
$$x = 100$$

Livægstmængden er 100. Vi indsætter de 100 i en af funktionerne:

$$-0{,}4 \cdot 100 + 87 = 47\ .$$

Ligevægtsprisen er 47 kr.

Opgave 3
a) Bestemme stamfunktionen F gennem punktet (2,3):
$F(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + k.$
Vi indsætter punktet:
$3 = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + k$
$k = 5.$
$F(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5.$

Opgave 4
a) Vi bestemmer $f'(x) = y' = 2ax + a.$

Indsættes det i differentialligningen får vi:

$$2ax + a - 3 = 6x$$
$$a(2x+1) = 6x+3$$
$$a \cdot 2x = 6x$$
$$a = 3.$$

Hvis $a = 3$ vil f(x) være løsning til differentialligningen.

Opgave 5

a) Bestemme skæringspunkter:

$$-0{,}5x^2 + 2x + 11 = -x + 3$$

$$-0{,}5x^2 + 3x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-3 \quad \sqrt{9 - 4 \cdot -0{,}5 \cdot 8}}{-1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-1}$$

$$x = -2 \vee x = 8.$$

Ved indsættelse i f(x) får vi følgende skæringspunkter:

$$\left(x, y\right) = \left(-2{,}5\right) \text{ og } \left(x, y\right) = \left(8{,}-5\right).$$

Delprøven med hjælpemidler

Opgave 6
a) Forklaringer til løsning af ligning:

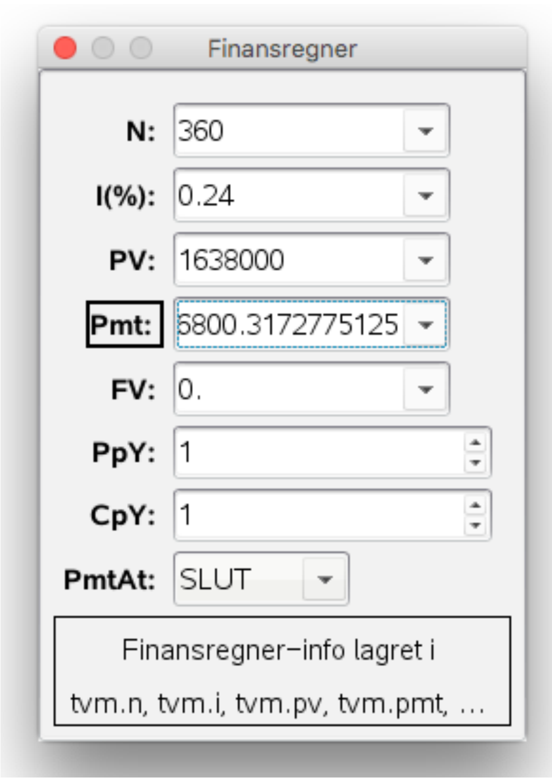
Linie 1: Vi har trukket 3 fra på begge sider og tilsvarende divideret med 2.

Linie 2: Vi har taget den naturlige logaritme på begge sider og anvendt at e^x og $\ln(x)$ er hinandens inverse (omvendte) funktioner.

Linie 3: Vi har isoleret x og fundet løsningen.

Opgave 7
a) Bestemme den månedlige ydelse:

80% af 2.000.000 kr. er 1.600.000 kr. Hertil lægges omkostninger, således at lånebeløbet bliver 1.638.000 kr.



Den månedlige ydelse er 6.800,32 kr.

b) Den samlede renteudgift i lånets løbetid:

$6800{,}32 \cdot 360 - 1638000 = 810.115{,}20$ kr.

c) Bidraget efter 10 år:

Vi starter med at bestemme restgælden efter 10 år ≈ 120 ydelser:

$\text{bal}(120,360,0.24,1638000) \blacktriangleright 1.23955\text{E}6$

Restgælder efter 120 terminer er 1.239.550 kr.

Bidragssatsen er derfor: $1239550 \cdot 0{,}00062 = 758{,}52$ kr.

Opgave 8

a) Vi bestemmer det samlede dækningsbidrag pr. uge:

$$x\cdot\left(\frac{-1}{9}\cdot x+130\right)+y\cdot\left(\frac{-1}{4}\cdot y+100\right)-(90\cdot x+60\cdot y) \blacktriangleright \frac{-x^2}{9}+40\cdot x-\frac{y^2}{4}+40\cdot y$$

$$DB(x,y) = -\frac{1}{9}x^2 + 40x - \frac{1}{4}y^2 + 40\,y.$$

b) Redegørelse for at $N(4800)$ er en ellipse:

Vi bestemmer ellipsens centrum samt det frie maksimum:

$$p = \frac{-40}{2\cdot -\frac{1}{9}} = 180$$

$$q = \frac{-40}{2\cdot -\frac{1}{4}} = 80$$

$$K = 0 - \left(-\frac{1}{9}\right)\cdot 180^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 80^2 = 5200.$$

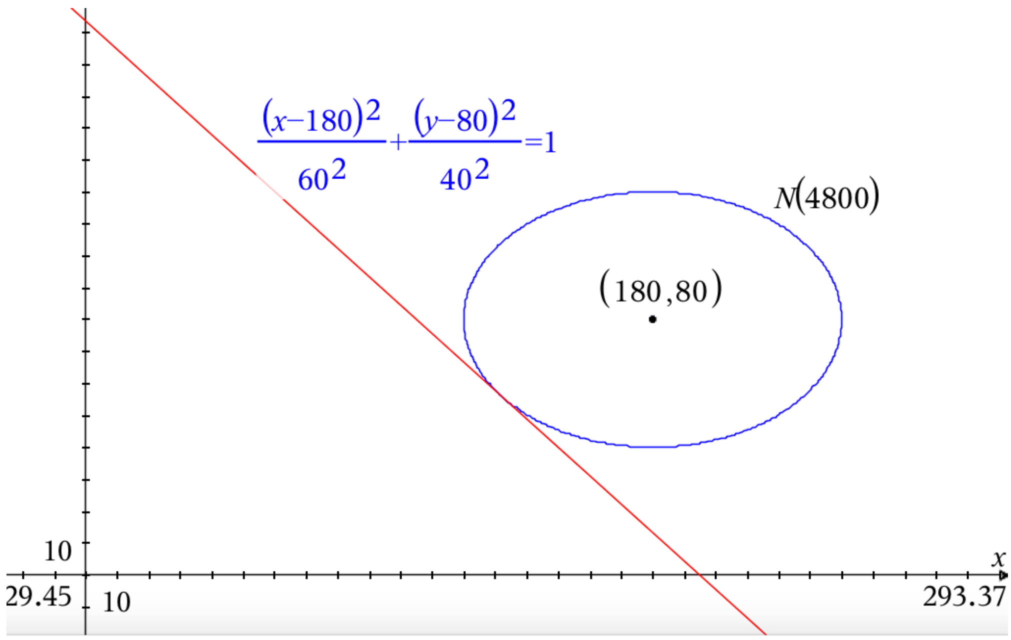
Herefter indsætter vi det fundne i niveau-ligningen for en ellipse:

$$\frac{(x-180)^2}{\frac{4800-5200}{-\frac{1}{9}}}+\frac{(y-80)^2}{\frac{4800-5200}{-\frac{1}{4}}}=1$$

$$\frac{(x-180)^2}{60^2}+\frac{(y-80)^2}{40^2}=1$$

Heraf ses, at der er tale om en ellipse med centrum i (180,80) og storakse på 60 og lilleakse på 40.

c) Grafiske billede af $N(4800)$:



Skæringspunkt mellem ellipse og begrænsningslinien bestemmes:

$$\frac{^-1}{9}\cdot x^2+40\cdot x-0.25\cdot\left(\frac{^-8}{9}\cdot x+\frac{520}{3}\right)^2+40\cdot\left(\frac{^-8}{9}\cdot x+\frac{520}{3}\right) \qquad {}^-0.308642\cdot x^2+81.4815\cdot x-577.778$$

$$\frac{d}{dx}\left({}^-0.30864197530864\cdot x^2+81.481481481484\cdot x-577.7777777778\right) \qquad 81.4815-0.617284\cdot x$$

$$\text{solve}(81.481481481484-0.61728395061728\cdot x=0,x) \qquad x=132.$$

$$\frac{^-8}{9}\cdot 132+\frac{520}{3} \qquad 56$$

Det størst mulige samlede dækningsbidrag pr. uge opnås ved afsætning af 132 stk. A og 56 stk. B.

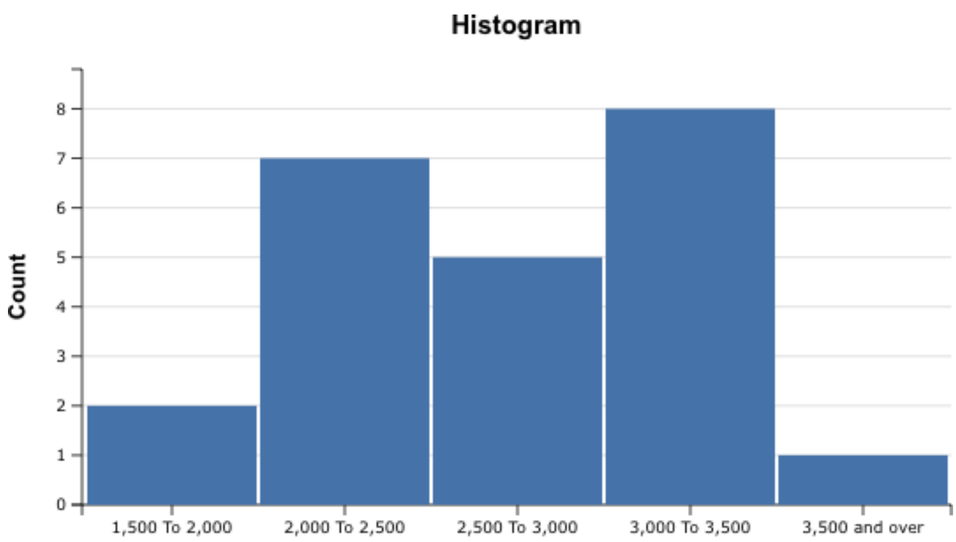
d) Pris for det to varer:

Vare A: $-\frac{1}{9}\cdot 132+130=115\frac{1}{3}$ kr.

Vare B: $-0.25\cdot 56+100=86$ kr.

Opgave 9

a) Grafisk præsentation af mobilkapacitet:

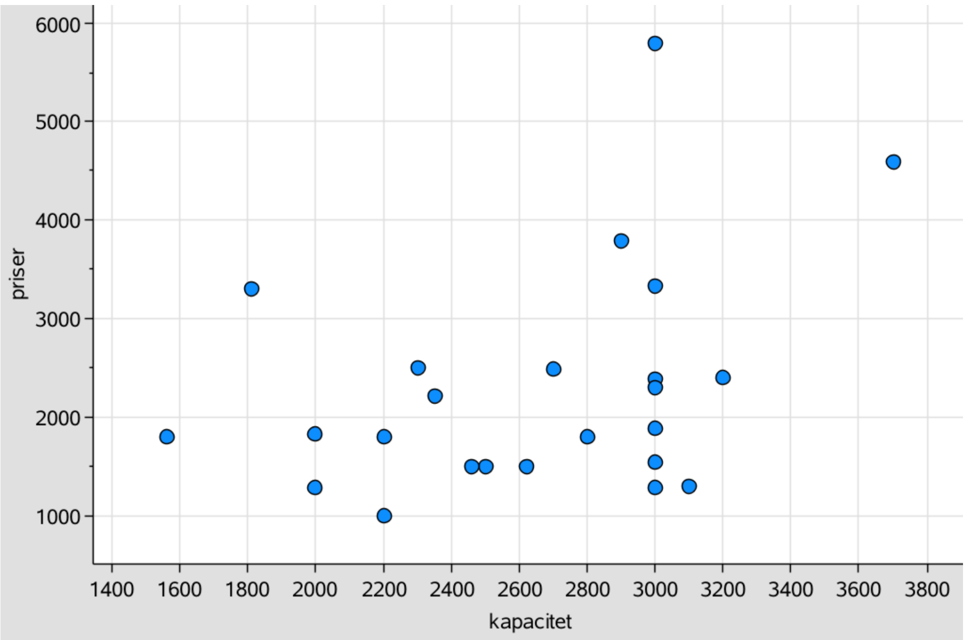


b) Gennemsnit og kvartilsæt for priser:

"Titel"	"Statistik med én variabel"
"$\bar{x}$"	2300.5416666667
"Q_1X"	1499.
"MedianX"	1868.5
"Q_3X"	2498.

Gennemsnitsprisen er 2300 kr.
Kvartilsættet er (1499,1868,2498).

c) Lineær regressionsmodel:



"Titel"	"Lineær regression (mx+b)"
"RegEqn"	"m*x+b"
"m"	0.82327677713469
"b"	125.71884706921
"r^2"	0.13363841048364
"r"	0.36556587707778

Regressionsmodel: $\hat{p}(x) = 0{,}82x + 125{,}72.$

Som det fremgår af både xy-plot og koefficienterne er der en ringe grad af lineær sammenhæng mellem batterikapacitet og pris.

d) 95% konfidensinterval for a (β):

"Titel" "Lineært Reg t-interval"
"RegEqn" "a+b*x"
"CLower" -0.10355440862687
"CUpper" 1.7501079628962

Med 95% sandsynlighed må det antages at stigningstakten i prisen på mobiltelefoner ligger i intervallet mellem 0 og 1,75.
Bemærk: Det giver ingen mening at bestemme dette interval, jfr. kommentarerne ovenfor.

Det kan ikke konkluderes, *at der er sammenhæng mellem mobiltelefoners batterikapacitet og pris.*

Opgave 10
a) Pivot-tabel (antalstabel):

Antal af Alder	**Kolonnenavne**				
Rækkenavne	**15-25 år**	**26-40 år**	**41-60 år**	**60+ år**	**Hovedtotal**
Dyrker ikke	17	28	36	43	124
Fitness	31	83	46	24	184
Holdsport	80	34	49	27	190
Individuel sport	39	30	37	20	126
Løb	39	74	44	26	183
Hovedtotal	**206**	**249**	**212**	**140**	**807**

b) χ^2 test på 5% niveau:

Hypoteser:

H_0: Ingen sammenhæng mellem alder og motionsform
H_1: Sammenhæng mellem alder og motionsform

Test resultat:

"Titel" "χ^2-uafhængighedstest"
"χ^2" 95.081608819985
"PVal" 5.0881869712624E-15
"df" 12.

Som det fremgår af p-værdien er den stort set 0, hvorfor vi kan afvise nul-hypotesen, og det må derfor antages, at der er sammenhæng mellem alder og motionsform. Bidragene til test størrelsen, se nedenfor:

$$\begin{bmatrix} 6.78328 & 5.42932 & 20.4577 & 1.4531 & 1.27376 \\ 2.75148 & 12.1156 & 10.3432 & 2.02707 & 5.44566 \\ 0.360118 & 0.112994 & 0.01671 & 0.459424 & 0.345305 \\ 21.4647 & 1.96541 & 1.07824 & 0.158056 & 1.04042 \end{bmatrix}$$

Det største bidrag til den samlede teststørrelse kommer fra kombinationen holdsport og alder 15 -25 år, dvs. stor forskel mellem observerede værdi og forventet værdi.

c) 95% konfidensinterval:

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"z−interval for en andel"} \\ \text{"CLower"} & 0.199059 \\ \text{"CUpper"} & 0.256951 \\ \text{"}\hat{p}\text{"} & 0.228005 \\ \text{"ME"} & 0.028946 \\ \text{"n"} & 807. \end{bmatrix}$$

Med 95% sandsynlighed må det antages at mellem 20% og 25% dyrker Fitness som foretrukken motionsform.

d) Her er der tale om en binomialfordeling (dyrker sport, dyrker ikke sport).

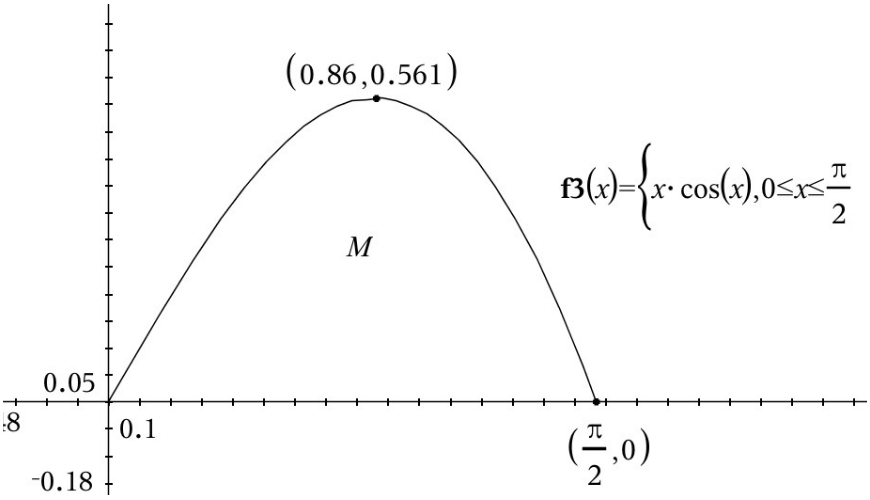
$X \sim b(200;0{,}08)$.

binomCdf(200,0.08,0,15) ▸ 0.462582

Sandsynligheden for at der højest er 15, der ikke dyrker motion er 0,46 ≈ 46%.

Opgave 11A

a) Det grafiske billede:



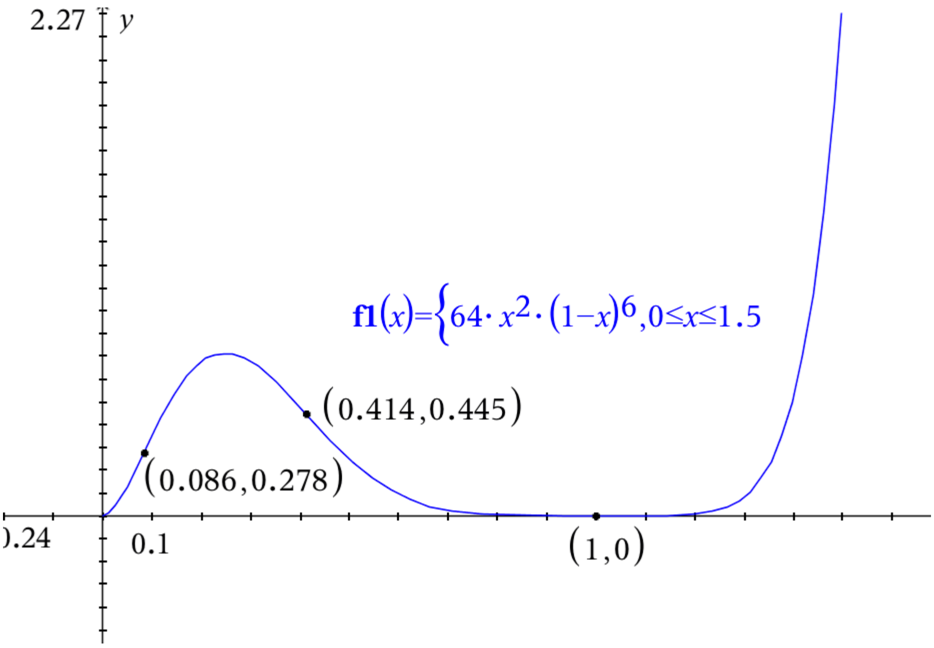
Funktionen har globalt maksimum i punktet (0,86;0,561), dvs. at det globale maksimum er 0,561.

b) Arealet af M:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cdot \cos(x))\,\mathrm{d}x \ \blacktriangleright\ \frac{\pi}{2}-1$$

Arealet er $\pi / 2 - 1 \approx 0{,}57$.

Opgave 11B
a) Eventuelle vendetangenter:

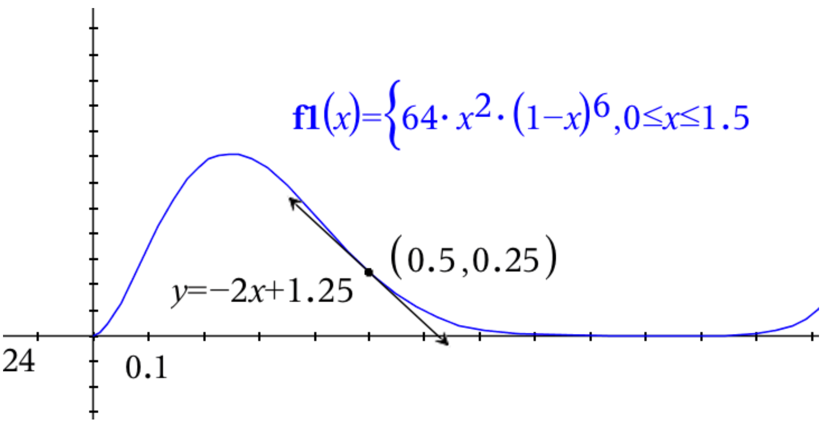


Som det fremgår af det grafiske billede har grafen for *f* 2 vendetangenter indenfor definitionsmængden samt 2 nulpunkter.

b) Ligning for tangent med hældningen -2:

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(64\cdot x^2\cdot(1-x)^6\right)=-2,x\right) \blacktriangleright x=^-0.013824 \text{ or } x=0.343059 \text{ or } x=\frac{1}{2}$$

Som det fremgår ovenfor har *f* 2 tangenter med hældningen -2. Vi vælger værdien $x = 0{,}5$ til bestemmelse af røringspunkt og tangentligning.



Ligningen for én af tangenterne med hældning –2 er: $y = -2x + 1{,}25$.

Opgave 11C

a) Fuldstændige løsning:

$$\text{deSolve}\left(y'=\frac{^-68}{x},x,y\right) \blacktriangleright y=c2-68\cdot\ln(x)$$

$p(x) = -68 \cdot \ln(x) + k.$

b) Den partikulære løsning:

$$\text{deSolve}\left(y'=\frac{^-68}{x} \text{ and } y(10000)=75,x,y\right) \blacktriangleright y=68\cdot\ln\left(\frac{10000}{|x|}\right)+75$$

I omskrevet form får vi:

$p(x) = -68 \cdot \ln(x) + 68 \cdot \ln(10000) + 75.$

Afsætning ved pris på 80 kr. Pr. stk.:

$$\text{solve}(^-68\cdot\ln(x)+68\cdot\ln(10000)+75=80,x)$$

$$\blacktriangleright x=10000\cdot e^{\frac{^-5}{68}}$$

$$\left(x=10000\cdot e^{\frac{^-5}{68}}\right)\blacktriangleright\text{Decimal} \blacktriangleright x=9291.09$$

Afsætningen bliver 9291 stk.

Peter Bregendal

Matematik A
Løsninger
2019-08