UNDERVISNINGS MINISTERIET

Matematik A

Højere handelseksamen

1. Delprøve, uden hjælpemidler
kl. 9.00-10.00

Torsdag den 27. maj 2010
kl. 9.00 - 14.00

hhx101-MAT/A-27052010

Matematik A
Prøven uden hjælpemidler

Prøvens varighed er 1 time.

Hjælpemidler, bortset fra skrive- og tegneredskaber, må ikke benyttes.

Opgavebesvarelsen skal afleveres renskrevet med tydelig skrift.

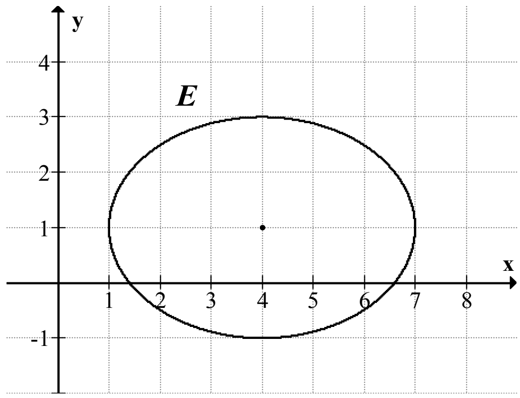
I bedømmelsen lægges vægt på, at eksaminandens tankegang klart fremgår.

Besvarelsen skal dokumenteres ved hjælp af beregninger, uddybende tekst samt brug af figurer og grafer med en tydelig sammenhæng mellem tekst og illustration.

Opgave 1

En ellipse med centrum i (x_0, y_0) og halvakserne a og b har ligningen $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

I koordinatsystemet til højre er ellipsen E indtegnet.



a) Bestem en ligning for E.

Opgave 2

Omkostningerne ved produktion af en vare kan beskrives ved en lineær funktion $f(x)=ax+b$, hvor x angiver den producerede mængde i stk., og $f(x)$ angiver omkostningerne i kr.

Det oplyses, at omkostningerne ved en produktion på 100 stk. er 5.000 kr., og at omkostningerne ved en produktion på 200 stk. er 8.000 kr.

a) Bestem en forskrift for funktionen f.

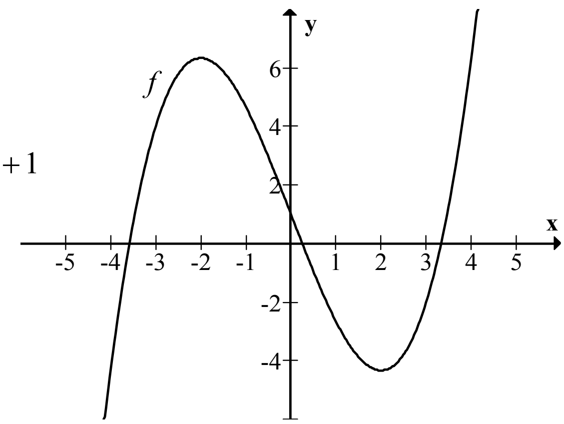
Opgave 3

En funktion f er givet ved forskriften $f(x)=\ln(2x-6)$

a) Bestem definitionsmængden for funktionen f.

Opgave 4

En funktion f er givet ved forskriften $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+1$



a) Bestem $f'(x)$ samt monotoniforholdene for f.

Opgave 5

En funktion f er givet ved forskriften $f(x)=4x^3-4x+2$

Grafen for en stamfunktion F til f går igennem punktet $P(1,5)$.

a) Bestem en forskrift for F.

Undervisningsministeriet

Opgaven er produceret med anvendelse af kvalitetsstyringssystemet ISO 9001 og miljøledelsessystemet ISO 14001

UNDERVISNINGS MINISTERIET

Matematik A

Højere handelseksamen

2. Delprøve
kl. 9.00-14.00

hhx101-MAT/A-27052010

Torsdag den 27. maj 2010
kl. 9.00 - 14.00

Matematik A
Prøven med hjælpemidler

Prøvens varighed er 5 timer.

Af opgaverne 8A og 8B må kun den ene afleveres til bedømmelse. Hvis begge opgaver afleveres, bedømmes kun besvarelsen af opgave 8A.

I prøvens første time må hjælpemidler, bortset fra skrive- og tegneredskaber, ikke benyttes.
I prøvens sidste 4 timer er alle hjælpemidler tilladt.

Opgavebesvarelsen skal afleveres renskrevet med tydelig skrift.

I bedømmelsen lægges der vægt på, at eksaminandens tankegang klart fremgår.

Besvarelsen skal dokumenteres ved hjælp af beregninger, uddybende tekst samt brug af figurer og grafer med en tydelig sammenhæng mellem tekst og illustration. Hvor hjælpemidler, herunder IT-værktøjer, er benyttet, skal mellemregninger erstattes af forklarende tekst.

Opgave 1

To vektorer er givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}t-5\\2\end{pmatrix}$$

hvor t er et tal.

a) Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ for $t=10$.

Parallelogrammet udspændt af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har arealet 20 for to værdier af t.

b) Bestem disse to værdier af t.

Opgave 2

Ole vil gerne have skiftet sin gamle bil ud med en nyere. For at få råd til den nye bil skal Ole låne 40.000 kr. Forhandleren tilbyder Ole en afbetalingskontrakt, hvor Ole skal betale en fast ydelse hver måned i 3 år. Renten er 1% pr. måned.

a) Vis, at den månedlige ydelse bliver 1.328,57 kr.

b) Bestem den effektive rente pr. år.

Ole er udlært om 15 måneder og vil gerne vide, hvad lånet kan indfries til umiddelbart efter betaling af den 15. ydelse.

c) Bestem restgælden umiddelbart efter betaling af den 15. ydelse.

Opgave 3

I tabellen herunder ses fordelingen af 25 telefonsælgeres indtjening pr. måned.

Indtjening i 1.000 kr.	Antal telefonsælgere
]0;10]	7
]10;20]	9
]20;30]	5
]30;40]	3
]40;50]	1

a) Tegn et diagram, der beskriver fordelingen af de 25 telefonsælgeres indtjening pr. måned.

Fordelingen kan beskrives ved forskellige statistiske deskriptorer, som f.eks.

typeinterval
kvartilsæt
gennemsnit
varians
standardafvigelse

b) Beskriv fordelingen af de 25 telefonsælgeres indtjening ved hjælp af 2 statistiske deskriptorer.

Opgave 4

En virksomhed producerer og sælger en vare i to versioner: NOVA og RETRO.
Prisen pr. stk. NOVA kan bestemmes ved

$$p_1(x) = -0{,}025x + 40 \qquad\qquad 0 \le x \le 700$$

hvor x angiver afsætningen i stk. NOVA.

Tilsvarende kan prisen pr. stk. RETRO bestemmes ved

$$p_2(y) = -0{,}025y + 30 \qquad\qquad 0 \le y \le 500$$

hvor y angiver afsætningen i stk. RETRO.

De variable enhedsomkostninger ved produktionen er 15 kr. pr. stk. NOVA og 10 kr. pr. stk. RETRO.

Ud over begrænsningerne på x og y, er produktionen begrænset af, at virksomheden maksimalt kan producere 1.000 stk. pr. uge. Det vil sige at $x + y \le 1000$.

Dækningsbidraget pr. vare kan bestemmes ved

dækningsbidrag = afsætning · (*pris pr. stk. – variable enhedsomkostninger*)

a) Gør rede for, at det samlede dækningsbidrag kan bestemmes ved funktionen D med forskriften

$$D(x,y) = -\,0{,}025x^2 + 25x - 0{,}025y^2 + 20y$$

Niveaukurven $N(t)$ er givet ved $D(x,y) = t$.

b) Gør rede for, at niveaukurven $N(8000)$ er en cirkel og tegn denne samt begrænsningsområdet i et koordinatsystem.

c) Bestem det antal stk. af henholdsvis NOVA og RETRO, der skal produceres og sælges pr. uge for at få det størst mulige samlede dækningsbidrag og bestem det størst mulige samlede dækningsbidrag.

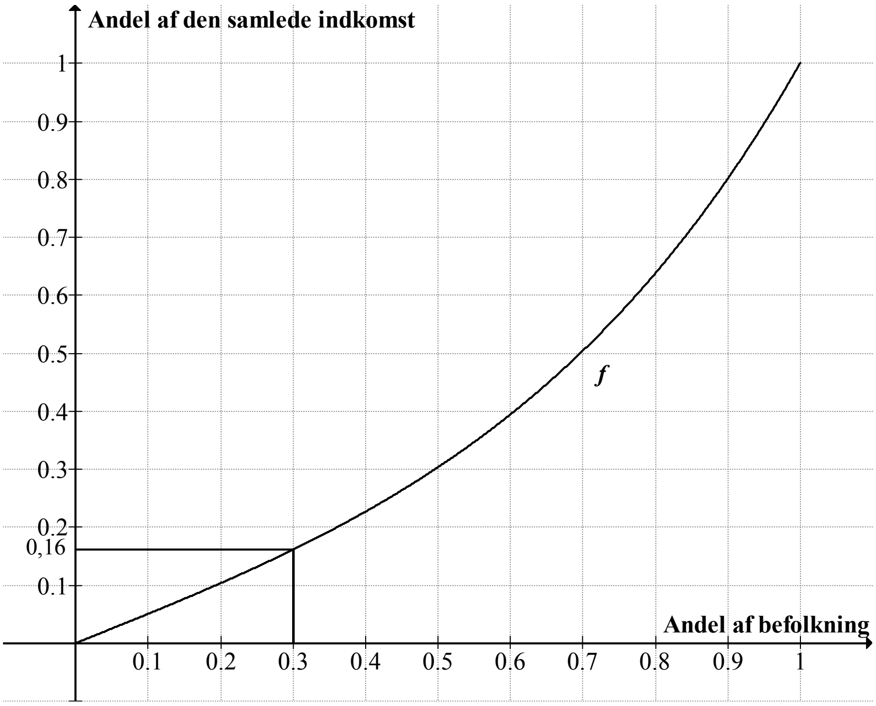
Opgave 5

Grafen nedenfor er en Lorenz-kurve. Den viser indkomstfordelingen i et bestemt land.
Markeringen på grafen ved punktet $(0{,}30\,;0{,}16)$ viser, at de 30% af befolkningen, der har de laveste indkomster, tjener ca. 16% af den samlede indkomst i befolkningen.

I det pågældende land kan kurven med god tilnærmelse beskrives ved funktionen f med forskriften

$$f(x) = 0{,}1x^5 + 0{,}4x^3 + 0{,}5x \qquad x \in [0\,;1]$$

hvor x er andelen af befolkningen og $f(x)$ er andelen af den samlede indkomst i befolkningen.



a) Hvor stor en andel af den samlede indkomst i befolkningen tjener de 40%, der har de laveste indkomster?

I en avis i det pågældende land ses overskriften:

"De rigeste 10% af befolkningen tjener 20% af den samlede indkomst"

b) Undersøg om denne overskrift er korrekt set i forhold til ovenstående oplysninger.

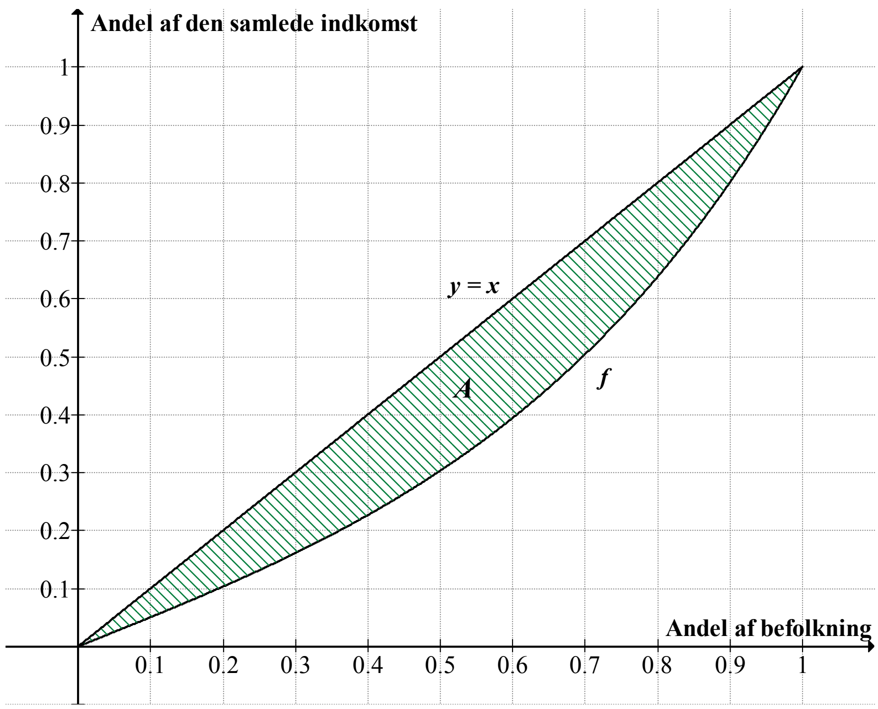
Hvis Lorenz-kurven er en ret linje $y = x$, betyder det, at indkomsten i landet er fordelt ligeligt.
I alle andre tilfælde vil Lorenz-kurven ligge under linjen $y = x$.

Arealet mellem linjen $y = x$ og 1.aksen i intervallet [0;1] er lig 0,5. Arealet mellem Lorenz-kurven og linjen med ligningen $y = x$ kaldes A. Den såkaldte *Gini-koefficient* beregnes som forholdet mellem A og 0,5. Det vil sige, at

$$\textit{Gini-koefficienten} = \frac{A}{0{,}5}$$

Denne koefficient er et tal imellem 0 og1 og er et udtryk for skævheden i indkomstfordelingen i landet. Jo tættere koefficienten er på 1, jo større skævhed er der i indkomstfordelingen.

Arealet A er illustreret nedenfor.



c) Bestem arealet A mellem linjen $y = x$ og Lorenz-kurven f for det pågældende land og bestem *Gini-koefficienten*.

Opgave 6

En virksomhed introducerede en ny vare i år 2008. Virksomheden forventer, at afsætningen af varen over en 10 års periode kan beskrives ved funktionen f med forskriften

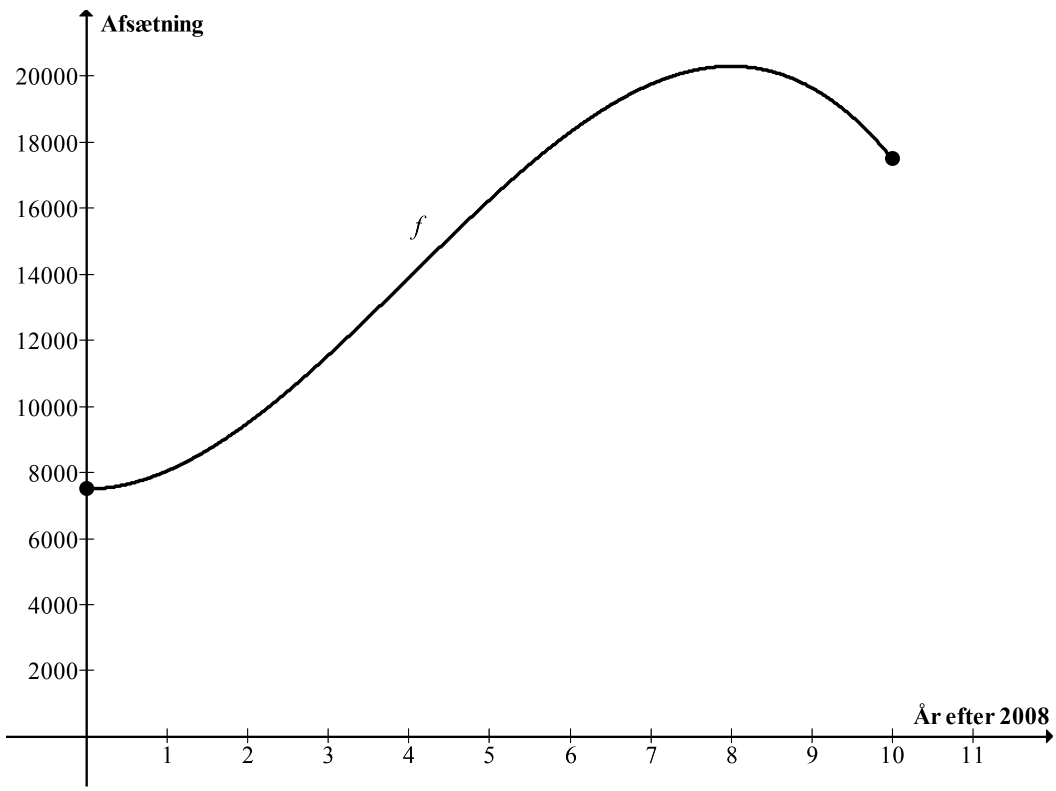
$$f(x) = -50x^3 + 600x^2 + 7500 \qquad x \in [0;10]$$

hvor x angiver tiden (målt i år) efter 2008. Grafen for funktionen f er vist nedenfor.

a) Bestem, efter hvor lang tid virksomheden vil opnå den største afsætning.

Den største stigning i afsætningen opnås på det tidspunkt, hvor grafen for f har vendetangent.

b) Bestem det tidspunkt, hvor virksomheden har den største stigning i afsætningen.



Opgave 7

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x) = e^{2x} - 4e^{x}$$

Vi ønsker at undersøge, om funktionen f har en vendetangent. Derfor bestemmes $f''(x)$, og ligningen $f''(x) = 0$ løses.

a) De manglende forklaringer til nedenstående linjer skal gives. Benyt bilag 1.

$f(x) = e^{2x} - 4e^{x}$	Funktionen f er givet.
$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x}$	Funktionen f er differentieret.
$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^{x}$	Funktionen f er differentieret 2 gange.
$4e^{2x} - 4e^{x} = 0$	Vi sætter $f''(x)$ lig med 0.
$4e^{2x} = 4e^{x}$	______________________________
$\dfrac{e^{2x}}{e^{x}} = 1$	______________________________
$e^{x} = 1$	______________________________
$x = \ln(1)$	______________________________
$x = 0$	______________________________

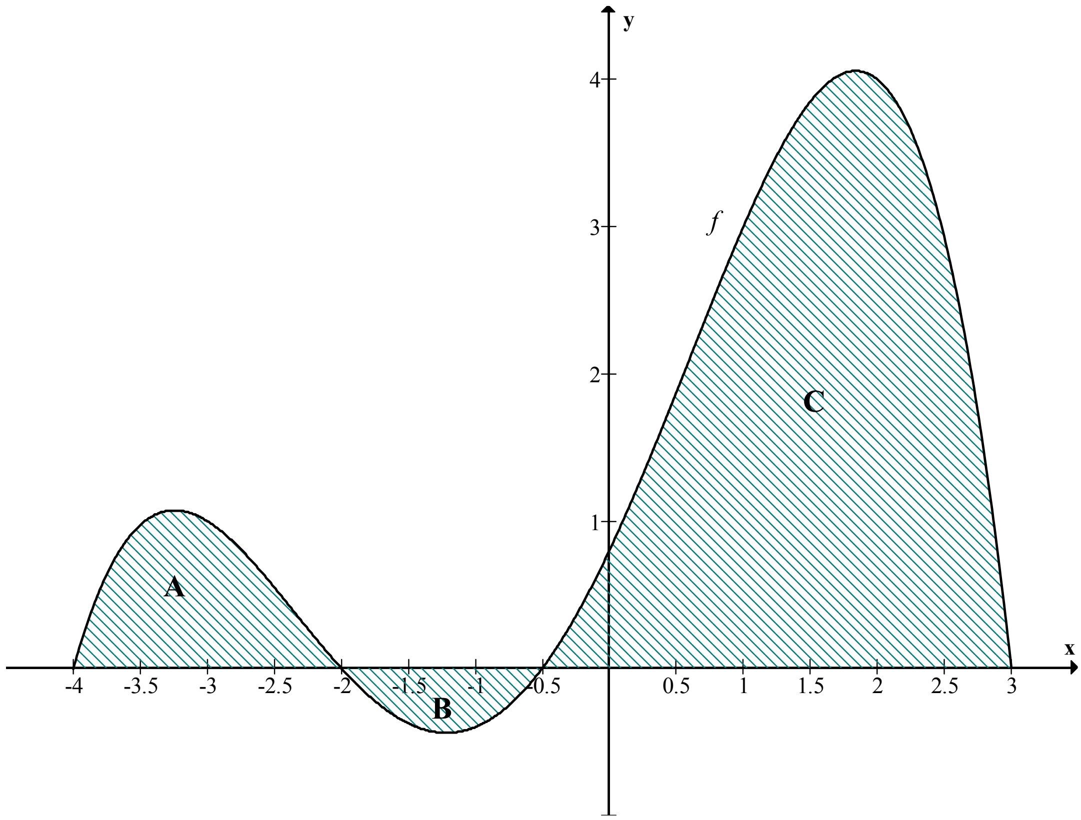
x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Fortegnet for $f''(x)$ skifter, så grafen for f har en vendetangent i punktet $(0, f(0))$.

Af opgaverne 8A og 8B
må kun den ene afleveres til bedømmelse.
Hvis begge opgaver afleveres,
bedømmes kun besvarelsen af opgave 8A.

Opgave 8A

Herunder ses grafen for *f*, som er et fjerdegradspolynomium.



Det oplyses at $\int_{-4}^{3} f(x)dx = 9{,}34$

a) Forklar, hvorfor det samlede areal af de skraverede områder ikke er 9,34.

Arealet af område B er bestemt ved $-\int_{-2}^{-0.5} f(x)dx$. For stamfunktionen F til f gælder, at

$F(-2) = 0{,}25$ og $F(-0{,}5) = -0{,}19$

b) Bestem arealet af område B og bestem det samlede areal af de skraverede områder.

Opgave 8B

Der er givet følgende kriteriefunktion

$$f(x, y) = 800x + 2000y$$

under bibetingelserne

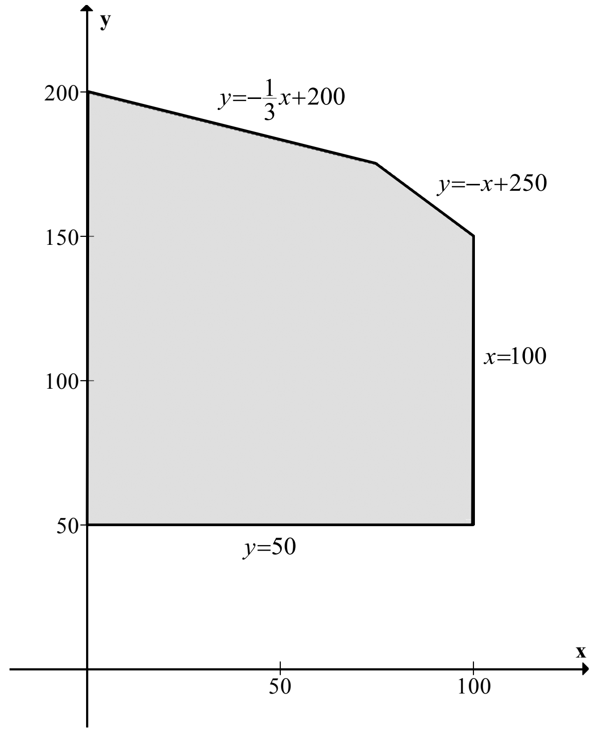
$$y \le -x + 250$$

$$y \le -\tfrac{1}{3}x + 200$$

$$0 \le x \le 100$$

$$y \ge 50$$

Disse bibetingelser definerer
det farvede polygonområde til højre.



Dette polygonområde er tillige
vist i bilag 2.

a) Bestem det punkt indenfor polygonområdet, hvor f antager sin størsteværdi.

b) Angiv det interval hvor koefficienten til x i $f(x, y)$ kan variere, så f stadigvæk antager sin størsteværdi i punktet bestemt i spørgsmål a).

Undervisningsministeriet

Opgaven er produceret med anvendelse af kvalitetsstyringssystemet ISO 9001 og miljøledelsessystemet ISO 14001

Bilag 1 til opgave 7 (med hjælpemidler) **– skal afleveres.**

Skole:	**Hold:**
Eksamensnr.	**Navn:**

$f(x)=e^{2x}-4e^{x}$	Funktionen f er givet.
$f'(x)=2e^{2x}-4e^{x}$	Funktionen f er differentieret.
$f''(x)=4e^{2x}-4e^{x}$	Funktionen f er differentieret 2 gange.
$4e^{2x}-4e^{x}=0$	Vi sætter $f''(x)$ lig med 0.
$4e^{2x}=4e^{x}$	______________________________
$\frac{e^{2x}}{e^{x}}=1$	______________________________
$e^{x}=1$	______________________________
$x=\ln(1)$	______________________________
$x=0$	______________________________
$\begin{array}{c\|ccc} x & & 0 & \\ \hline f''(x) & - & 0 & + \end{array}$	Fortegnet for $f''(x)$ skifter, så grafen for f har en vendetangent i punktet $(0,f(0))$.

Bilag 2 til opgave 8B (med hjælpemidler).

Skole:	Hold:
Eksamensnr.	Navn: